# Глава 13

# Основы теории. Временные ряды

## §1 Временные ряды

### 1.1 Введение

Временной ряд — это просто набор набдюдений, сделанных друг за другом по прошествии времени. Такой ряд в общем может быть записан:

$$y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_n) \qquad \text{то есть } \{y(t_i) : i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Данные ряда, которые наблюдаются, обычно разделены равными промежутками времени. В этом случае ряд записывается:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \qquad \text{то есть } \{y_t : t = 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Тот факт, что наблюдения происходят упорядоченно со временем, имеет важнейшее значение для любой попытки описывать, анализировать и моделировать данные временных рядов. Наблюдения связаны друг с другом и не могут рассматриваться как наблюдения независимых случайных величин. Существует сильная зависимость между членами основной последовательности величин, которую любой анализ должен распознавать и использовать.

Заметим, что наблюдения $y_t$ могут появляться в разных ситуациях — например, шкала времени может быть по сути дискретной (как в случае рядов "заключительного" разделения цен) или ряды могут появляться как выборка рядов наблюдаемых непрерывно по времени (как в случае ежечасных данных из таблицы атмосферных температур), или наблюдения могут представлять результаты составных величин за период времени (как в случае общего дохода кампании по страховым премиям от нового вида коммерческой деятельности за каждый месяц).

Основные цели анализа временных рядов вкратце выглядят так:

i) Описание и моделирование

**(a)** Всегда сначала изобразите диаграмму данных. Выявите основные свойства ряда (например, направленное, сезонное влияние) и можете обозначить подходящий метод анализа. Можете предложить желательное преобразование (например, анализировать $w_t = \log y_t$ вместо $y_t$). Можете выявить наличие выбросов — наблюдения, которые не соответствуют общей модели данных.

**(b)** Найдите простые описательные итоговые характеристики (например, среднее значение дохода за январь, среднее отклонение от ежедневного количества осадков, оценку среднего отклика как функцию времени, скажем, $\mu(t)$). Множество величин, называемых выборочными коэффициентами автокорреляциации, подтверждает большое значение итоговой связи между наблюдениями с фиксированными промежутками времени.

**(c)** Моделирование: решение, полученное наиболее подходящим способом — простое детерминированное описание основных особенностей или более сложная стохастическая модель и последовательный подбор модели.

ii) Прогнозирование

Прогнозируемые будущие значения — очень важно на практике — много различных методов/критерии использования.

iii) Процесс мониторинга/контроля

Применяя наблюдаемые временные ряды для обнаружения изменений основного процесса (будь это производственный процесс, состояние здоровья пациента, или мера выполнения дела).

iv) Объяснение

В многомерном контексте, используя дисперсию одного временного ряда, чтобы помочь "объяснить"поведение другого ряда.

## §2 Простые описательные способы

У некоторых временных рядов дисперсия подчинена очевидным свойствам, и простая детерминированная модель — это, может быть, все, что требуется для адекватного описания.

Такой анализ составляет обычно распадающиеся временные ряды на следующие компоненты:

i) направленная

ii) сезонность (или сезонная компонента/воздействие)

iii) периодическая (или периодические флуктуации)

iv) нерегулярная компонента (остатки)

Направленная: долгосрочное изменение в среднем — плавное колебательное движение. Пример направленности — рост цен во время непрерывной инфляции.

При удалении направленности, ряд называется "лишенным направленности".

Сезонность: дисперсия, которая периодична по характеру определенного метода. Пример сезонности — продажи фотопленок, которые достигают своего максимума в периоды отпусков и Рождества.

При удалении действия сезонности, ряд называется "с устранением сезонных колебаний".

Периодическая: краткосрочное или долгосрочное колебание вокруг направленности, обусловленное различными причинами, которые порождают направленность и предсказуемы до некоторой степени. Пример периодичности — экономические циклы спада и роста.

Нерегулярная компонента: ряд остатков получается после удаления направленности, сезонного воздействия и периодических флуктуаций.

Эти остатки могут составлять "случайный ряд то есть могут рассматриваться как наблюдения независимых, одинаково распределенных случайных величин. Нет схемы или структуры, оставленной для модели. (Они, тем не менее, могут проявлять зависимость.)

Следующие диаграммы показывают множество данных временных рядов как удаленные компоненты. Первая диаграмма показывает полные данные. Она представляет 12 лет ежемесячных данных. Данные показывают в основном увеличение направленности за 12-летний период. Мы видим основные максимумы каждые четыре года, обозначающие четырехгодичные периоды. Вторая диаграмма показывает данные, лишенным направленности. На третьей диаграмме кроме того удалили четырехгодичные периоды. Неосновные максимумы каждого года показывают сезонность. На четвертой диаграмме кроме того удалили сезонность, оставив только нерегулярную компоненту.

Модель временного ряда

Модель временного ряда: лишенная направленности

Модель временного ряда: лишенная направленности и трехгодичных периодов

Модель временного ряда: лишенная направленности, трехгодичных периодов и сезонности

# §3 Процессы временного ряда

Временной ряд $\{y_t : t = 1, 2, \ldots, n\}$ может считаться множеством реализованных значений (фактически наблюдаемых значений) множества случайных величин $\{Y_t : t = 1, 2, \ldots, n\}$. Каждая случайная величина $Y_t$ имеет распределение, среднее значение и дисперсию, и $Y_t$ не являются независимыми случайными величинами.

Функция среднего значения (или направленности) процесса есть $\mu(t) = E(Y_t)$.

$Y_t$ и $Y_s$ одинаково коррелированные, и автоковариационная функция процесса определяется следующим образом.

Определение: Автоковариационная функция $\gamma(t, s)$ величин $\{Y_t\}$ задается:

$$\gamma(t, s) = E[\{Y_t - \mu(t)\}\{Y_s - \mu(s)\}]$$

Дисперсия процесса есть $\sigma^2(t) = \gamma(t, t)$

Основная идея изучения процессов временных рядов в стационарности, идея того, что структура/свойства процесса не изменяются с течением времени. Этого достаточно, чтобы утверждать, что (i) среднее значение $\mu(t)$ постоянно для всех значений $t$ (поэтому можно просто обозначить $\mu$), и что (ii) значение автоковариационной функции $\gamma(t, s)$ зависит только от запаздывания $k$, где $k = |t - s|$, рассматривается интервал времени между двумя величинами.

В данном случае $\gamma(k)$ или $\gamma_k$ записаны для $\gamma(t, t + k)$, и $\gamma(0)$ или $\gamma_0$ для дисперсии процесса.

Полезно установить соотношения автоковариации, чтобы использовать автокорреляционную функцию/коэффициент.

Определение: автокорреляционная функция $\rho(k)$ стационарного процесса временного ряда $Y_t$ задается $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$, где $\gamma(k) = Cov(Y_t, Y_{t+k})$ Обычно записывают $\rho(k)$ для значения функции с запаздыванием $k$, и ссылаются на него как на коэффициент автокорреляциации с запаздыванием $k$. Заметим, что $\rho_0 = 1$ и, для $k > 0$, $\rho_{-k} = \rho_k$.

# §4 Авторегрессивный процесс (АР), процесс скользящего среднего (СС) и авторегрессивный процесс скользящего среднего (АРСС)

В этом разделе рассматриваются два семейства процессов. В каждом случае чисто случайный процесс $Z_t$ составляет важную основу. $Z_t$ независимы друг от друга, со средним значением 0 и дисперсией $\sigma_Z^2$. Такой процесс называется "белый шум".

## 4.1 Авторегрессивный процесс (АР)

Определение: $\{Y_t\}$ является авторегрессивным процессом порядка $p$, если

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \ldots + \alpha_p Y_{t-p} + Z_t$$

Обычно записывают "$Y_t$ является АР(p) процессом".

АР процессы обеспечивают вероятностную модель в любой ситуации, где возможно рассмотрение значений временных рядов в зависимости от ближайших прошедших значений плюс текущая шумовая составляющая/случайный вектор ошибок.

## 4.2 Процесс скользящего среднего (СС)

Определение: $\{Y_t\}$ является процессом скользящего среднего (СС) порядка $p$, если

$$Y_t = Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

Обычно записывают "$Y_t$ является СС(q) процессом".

СС процессы обеспечивают вероятностную модель в любой ситуации, где возможно рассмотрение значений временных рядов в результате комбинации текущих и ближайших прошедших шумов/случайных векторов ошибок. В данном представлении $\{Y_t\}$ является "сглаженным шумом".

### 4.3 Авторегрессивный процесс скользящего среднего (АРСС)

Два основных процесса (АР и СС) могут быть соединены вместе для получения авторегрессивного процесса скользящего среднего (АРСС). Определение АРМА(p,q) процесса:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \ldots + \alpha_p Y_{t-p} + Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

Заметим, что АРМА(p,0) есть АР(p); АРМА(0,q) есть СС(q).

## §5 Дифференцирование данных временных рядов и АРИСС процессы

Дифференцирование данных временных рядов — один из нескольких доступных методов, часто применяемых для удаления направленной и/или аддитивной сезонной компонент ряда. Разность между парами наблюдений вычисляется с соответствующим интервалом времени, и полученный ряд используется.

Задан ряд $\{y_t : t = 1, 2, \ldots, n\}$, затем дифференцируем с запаздыванием $k$, получаем преобразованный ряд $\{v_t\}$, где $v_t = y_t - y_{t-k}$

Дифференцируя с запаздыванием 1 (получая "первые разности"), исключаем линейную направленность.

[Пусть $Y_t = m_t + Z_t$, где $m_t = a + bt$. $E(Y_t) = a + bt$.

Тогда $V_t = Y_t - Y_{t-1} = a + bt + Z_t - a - b(t-1) - Z_{t-1} = b + Z_t - Z_{t-1}$ и $E(V_t) = b$(константа)].

[Заметим, что дифференцирование с запаздыванием больше 1 устраняет линейную направленность вместе с сезонными воздействиями]

Например, дифференцирование с запаздыванием в 4 месяца устраняет сезонные воздействия в данных за квартал.

Эти основные действия можно продолжить. Например, квадратичная направленность устраняется дифференцированием с запаздыванием 1 второй раз, то есть дифференцируя уже дифференцируемый ряд. Пусть $v_t = y_t - y_{t-1}$, тогда $w_t = v_t - v_{t-1}$ эквивалентно тому, что $w_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$.

Дифференцирование рядов (с запаздыванием 1, и более одного раза, если необходимо) дает ряд, для которого стационарная модель является основой методологии моделирования и прогнозирования, пропагандируемой Боксом и Дженкинсом, — методологии, котороя широко применяется и имеет огромное значение с начала 1970-х годов.

Используем эти действия для расширения класса АРСС процессов, которые имеют очень широкую область применения. Расширенное семейства процессов — называется АРИСС процессы — дает очень полезные семейства моделей для нестационарных рядов.

"АРИСС процесс"обозначает "авторегрессивный интегрированный процесс скользящего среднего". Термин "интегрированный"обозначает обратную операцию к "дифференцируемый". $\{Y_t\}$ является АРИСС(p,d,q) процессом, если после его дифференцирования d раз, процесс становится АРСС(p,q) процессом. Поэтому АРИСС процесс является нестационарным процессом, и его d-ая разности составляют стационарный АРСС процесс.

Дадаим более лаконичное определение, для этого используем оператор обратного сдвига $B$, который определяется (его действием) как $BY_t = Y_{t-1}$. Действие оператора $B$ — перемещение назад на одну единицу времени.

Первая разность может быть записана как $V_t = Y_t - Y_{t-1} = (1-B)Y_t$, вторая разность как $W_t = V_t - V_{t-1} = (1-B)V_t = (1-B)^2 Y_t$, и в общем виде d-ая разность как $(1-B)^d Y_t$.

Определение: $\{Y_t\}$ является АРИСС(p,d,q) процессом, если

$$X_t = (1-B)^d Y_t$$

является стационарным АРСС(p,q) процессом.

## §6 Нахождение автокорреляционной функции: пример

Покажите, что автокорреляционная функция АРСС(1,1) процесса

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + Z_t + \beta Z_{t-1}$$

заданной как

$$\rho_1 = \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1+\beta^2+2\alpha\beta}$$

выполняется:

$$\rho_k = \alpha\rho_{k-1}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

**Решение**

Используя оператор обратного сдвига $B$, имеем

$$(1-\alpha B)Y_t = (1+\beta B)Z_t$$

$$\Longrightarrow Y_t = \frac{(1+\beta B)}{(1-\alpha B)} Z_t$$
$$= (1+\beta B)(1+\alpha B+\alpha^2 B^2+\ldots)Z_t$$
$$= \left(1+(\alpha+\beta)\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{j-1}B^j\right)Z_t$$
$$= Z_t+(\alpha+\beta)\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{j-1}Z_{t-j}$$

$$E(Y_t)=0$$
$$E(Y_tZ_t)=\sigma_Z^2$$
$$E(Y_tZ_{t-1})=(\alpha+\beta)\sigma_Z^2$$
$$E(Y_tZ_{t+k})=0 \qquad k=1,2,\ldots$$

Используя уравнение, определяющее процесс

$$Y_t^2=\alpha Y_tY_{t-1}+Y_tZ_t+\beta Y_tZ_{t-1}$$

Возьмем математическое ожидание, получим

$$\gamma(0)=\alpha\gamma(1)+\sigma_Z^2+\beta(\alpha+\beta)\sigma_Z^2$$
$$=\alpha\gamma(1)+(1+\alpha\beta+\beta^2)\sigma_Z^2$$

Используя уравнение, определяющее процесс

$$Y_tY_{t-1}=\alpha Y_{t-1}^2+Z_tY_{t-1}+\beta Z_{t-1}Y_{t-1}$$

Возьмем математическое ожидание, получим

$$\gamma(1)=\alpha\gamma(0)+0+\beta\sigma_Z^2$$

Решая, получаем

$$\gamma(0)=\frac{(1+\beta^2+2\alpha\beta)}{1-\alpha^2}\sigma_Z^2$$

и

$$\gamma(1)=\frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}\sigma_Z^2$$

Используя уравнение, определяющее процесс

$$Y_tY_{t-k}=\alpha Y_{t-1}Y_{t-k}+Z_tY_{t-k}+\beta Z_{t-1}Y_{t-k}$$

Возьмем математическое ожидание, получим

$$\gamma(k) = \alpha\gamma(k-1) \qquad k = 2, 3, \dots$$

Поэтому

$$\rho_1 = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{(1+\beta^2+2\alpha\beta)}$$

и

$$\rho_k = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \alpha\frac{\gamma(k-1)}{\gamma(0)} = \alpha\rho_{k-1} \qquad k = 2, 3, \dots$$

# Часть VIII