# Глава 15

# Основы теории–Треугольники Развития

## АНАЛИЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ РАЗВИТИЯ

## §1 Исходные данные

### 1.1 Истоки треугольников развития

Треугольники развития (задержки) обычно возникают в тех типах страхования (в частности, в страховании, не касающемся жизни), где после ущерба и до того момента, как будет определен полный объем исков, которые необходимо оплатить, должно пройти некоторое время. Важно отметить, что эти иски приписываются тому году, в котором был оформлен полис.

Страховой компании необходимо знать, сколько она обязана выплатить по искам, чтобы можно было вычислить, какой капитал для этого требуется. Однако, до того, как станут известны точные исковые суммы, может пройти много лет. Существует множество причин задержек определения окончательных сумм. Задержка может произойти до уведомления об иске и/или между уведомлением и конечным расчетом.

Очевидно, что, хотя компания не знает точных данных по величине исков для каждого года, она должна попытаться оценить эти данные настолько достоверно и точно, насколько это возможно.

### 1.2 Представление информации по искам

Существует несколько способов представления исковых данных, которые акцентируют внимание на различных аспектах информации.

Здесь они (данные) будут представлены как треугольник, что является наиболее распространенным методом. Год, в котором дело было зарегистрировано и страховщик взял на себя риск, называется годом событий. Количество лет, прошедших до того, как будет сделана выплата, называется задержкой или периодом развития. Исковые данные делятся по годам событий и годам развития. Следующая таблица является примером взаимосвязи между годом событий и годом развития. В некоторых видах страхования может оказаться необходимым рассмотрение исков по месяцам или сезонам, но основной принцип остается прежним.

### Пример 15.1

**Выплаты по искам с нарастающим итогом**

| **Год** | **Год развития** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **событий** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| 1992 | 786 | 1410 | 2216 | 2440 | 2519 |
| 1993 | 904 | 1575 | 2515 | 2796 | |
| 1994 | 995 | 1814 | 2880 | | |
| 1995 | 1220 | 2124 | | | |
| 1996 | 1182 | | | | |

**Рис.1**

Здесь представлены общие суммарные величины, выплаченные к концу каждого года развития. Они были собраны после окончания 1996 года событий. Для этого года заявлены только выплаты с задержкой 0. Для 1995 года — выплаты с задержками 0 и 1, и т.д.

Задача состоит в том, чтобы определить, какие еще суммы должны быть выплачены по указанным годам событий. Для 1996 года это можно осуществить, рассмотрев предыдущие годы событий. Если совокупные выплаты растут сходным образом, то можно сказать, что за 4 года они, вероятно, составят примерно 3788. Это число получено с помощью предположения, что 1996 год событий похож на 1992 по принципу осуществления выплат, и оценки выплат с нарастающим итогом к концу года развития 4:

$$1182 \times \frac{2519}{786} = 3788$$

Это не всегда "лучшая" оценка, но она дает возможность заполнить нижний треугольник рисунка 1, сравнивая представленные данные с прошлым опытом. Этот процесс является главным предметом изучения данной главы.

# §2 Прогнозирование с помощью коэффициентов развития

## 2.1 Принцип развития

Основное предположение, сделанное для оценки неоплаченных исков, относится к принципу развития. Простейшее предположение заключается в том, что выплаты осуществляются сходным образом для каждого года событий. Пропорциональные приросты известных совокупных выплат от одного года развития к другому затем могут использоваться для вычисления ожидаемых совокупных выплат для будущих лет развития.

Однако, как показано в примере, описанном ниже, есть множество вариантов того, как этот коэффициент можно использовать для прогнозирования будущих исков.

Замечание: Коэффициент, применяемый для прогнозирования будущих исков, известен как коэффициент развития.

**Пример 15.2**

**Пропорциональные приросты совокупных выплат**

| **Год событий** | **Год развития** 0 | | **1** | | **2** | | **3** | | **4** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1992 | 786 | *1.794* | 1410 | *1.572* | 2216 | *1.101* | 2440 | *1.032* | 2519 |
| 1993 | 904 | *1.742* | 1575 | *1.597* | 2515 | *1.112* | 2796 | | |
| 1994 | 995 | *1.7823* | 1814 | *1.588* | 2880 | | | | |
| 1995 | 1220 | *1.756* | 2124 | | | | | | |
| 1996 | 1182 | | | | | | | | |

**Рис.2**

Коэффициенты прироста совокупных выплат для каждого года событий с 1992 по 1995 различаются от года развития 0 к году развития 1. Нелегко решить, какой из коэффициентов является "правильным", например, при прогнозировании выплат для года событий 1993. Для безопасной оценки, скорее всего, лучше взять больший коэффициент, то есть 1.823.

Однако, некоторые виды среднего значения коэффициентов могут оказаться более подходящими. Можно использовать простое среднее арифметическое:

$$\frac{1.794 + 1.742 + 1.823 + 1.756}{4} = 1.779$$

Основное неудобство такого усреднения состоит в том, что оно не принимает в расчет тот факт, что те годы, в которые произошло больше исков, дают большую информацию. Поэтому, чем больше величина исков, тем большую значимость она должна иметь в коэффициенте. Это предполагает использование взвешенных средних, и обычно в качестве весов выбираются значения исков с накопительным итогом.

| Год событий | Коэффициент | Вес |
|---|---|---|
| 1992 | 1.794 | 786 |
| 1993 | 1.742 | 904 |
| 1994 | 1.823 | 995 |
| 1995 | 1.756 | 1220 |

$$\frac{1.794 \times 786 + 1.742 \times 904 + 1.823 \times 995 + 1.756 \times 1220}{786 + 904 + 995 + 1220} = 1.777$$

Этот метод оценки коэффициентов, описывающих принцип развития, называется цепочно-лестничный метод. Самый эффективный способ вычисления таких коэффициентов приводится в следующем разделе.

## 2.2 Техника цепочно-лестничного метода

Этот способ вычисления коэффициентов развития продемонстрирован в следующем примере:

**Пример 15.3** Напомним, что коэффициент для года событий 1992 был вычислен так:

$$1.794 = \frac{1410}{786}$$

Коэффициенты для остальных лет событий вычислялись похожим образом. Поэтому, числитель равенства, приведенного в конце раздела 2.1, может быть записан иначе:

$$\frac{1410}{786} \times 786 + \frac{1575}{904} \times 904 + \frac{1814}{995} \times 995 + \frac{2124}{1220} \times 1220 = 1410 + 1575 + 1814 + 2142$$

Поэтому, коэффициент развития может быть вычислен с использованием исков с нарастающим итогом в годы развития 0 и 1:

$$\frac{1410 + 1575 + 1814 + 2142}{786 + 904 + 995 + 1220}$$

Название этого метода, по-видимому, происходит от ступенчатых операций, которые скрепляют по цепочке годы развития. Коэффициенты развития в технике цепочно-лестничного метода для каждого года могут быть найдены сложением соответствующего количества членов. Это проиллюстрировано ниже:

**Развитие**

| **Год событий** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1992 | 786 | 1410 | 2216 | 2440 | 2519 |
| 1993 | 904 | 1575 | 2515 | 2796 | |
| 1994 | 995 | 1814 | 2880 | | |
| 1995 | 1220 | 2124 | | | |
| 1996 | 1182 | | | | |
| | | $\frac{6941}{3905}$ | $\frac{7611}{4799}$ | $\frac{5236}{4731}$ | $\frac{2519}{2440}$ |
| | | $= 1.777$ | $= 1.586$ | $= 1.107$ | 1.032 |

**Рис.3**

Для каждого года мы вычислили коэффициенты развития. Теперь можно спрогнозировать будущее развитие для каждого года событий.

Для года событий 1996, прогнозы исков с нарастающим итогом такие:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1182 | $\times 1.777$ | | | | $= 2100$ |
| 1182 | $\times 1.777$ | $\times 1.586$ | | | $= 3331$ |
| 1182 | $\times 1.777$ | $\times 1.586$ | $\times 1.107$ | | $= 3688$ |
| 1182 | $\times 1.777$ | $\times 1.586$ | $\times 1.107$ | $\times 1.032$ | $= 3806$ |

Для года событий 1995, начинаем со значения 2142 для года развития 1 и используем только последние 3 звена коэффициентов.

**Прогнозируемые выплаты по искам с нарастающим итогом**

| **Год** | | | **Развитие** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **событий** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| 1992 | | | | | |
| 1993 | | | | | 2885 |
| 1994 | | | | 3188 | 3290 |
| 1995 | | | 3397 | 3761 | 3881 |
| 1996 | | 2100 | 3331 | 3688 | 3806 |

**Рис.4**

Заметим, что нельзя сделать прогноз для первого года событий, потому что невозможно спрогнозировать, что произойдет после наивысшего года развития.

Резервы, которые необходимо иметь к концу 1996 года — это сумма по всем годам событий, для которых прогноз может быть сделан по разнице между совокупными выплатами к концу года развития 4 и известными значениями в треугольнике развития для этого года событий.

Тогда из рисунков 1 и 4, определим резервы к концу 1996 года:

$$(2885 - 2796) + (3290 - 2880) + (3881 - 2142) + (3806 - 1182) = 4862$$

Заметим, что к выплатам в различные годы не применялся учетный процент.

## 2.3 Модель проверки

Техника цепочно-лестничного метода главным образом используется для оценки развития выплат по искам с нарастающим итогом. Однако, полезно проверить, будет ли такая оценка в полной мере соответствовать исковым данным, которые уже были получены. Для иллюстрации этой проверки, возьмем данные из рисунка 2.

Чтобы проверить, насколько хорошо выполнена техника цепочно-лестничного метода, в примере, описанном ниже будут рассмотрены иски в 0-ой год развития для лет событий 1992-1995.

**Пример 15.4** Пусть реальные иски в год развития 0 равны:

| | |
|---|---|
| 1992 | 786 |
| 1993 | 904 |
| 1994 | 995 |
| 1995 | 1220 |

Коэффициенты развития, вычисленные в разделе 2.2 — 1.777, 1.586, 1.107 и 1.032. С их помощью может быть получена оценка выплат по искам с нарастающим итогом для каждого года развития. Наша задача — сравнить эти значения с реальными данными из рисунка 2.

Следующая таблица дает "установленные" значения, полученные с использованием цепочно-лестничного метода:

**Установленные выплаты по искам с нарастающим итогом**

| **Год** | **Развитие** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **событий** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| 1992 | 786 | 1397 | 2215 | 2452 | 2531 |
| 1993 | 904 | 1606 | 2548 | 2820 | |
| 1994 | 995 | 1768 | 2804 | | |
| 1995 | 1220 | 2168 | | | |

**Рис.5**

Теперь можно сравнить рисунки 5 и 1. Однако, предпочтительней будет проверить приросты выплат по искам с нарастающим итогом, рассмотрев модель детально. Это дает более точную проверку.

Приросты совокупных выплат для лет развития (как реальные, так и установленные) приводятся на рисунке 6.

| | | Развитие | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| 1992 | Реальные | 786 | 624 | 806 | 224 | 79 |
| | Установленные | 786 | 611 | 818 | 237 | 79 |
| | Ошибка | - | *13* | *-12* | *-13* | *0* |
| 1993 | Реальные | 904 | 671 | 940 | 281 | |
| | Установленные | 904 | 702 | 942 | 272 | |
| | Ошибка | - | *-31* | *-2* | *9* | |
| 1994 | Реальные | 995 | 819 | 1066 | | |
| | Установленные | 995 | 773 | 1036 | | |
| | Ошибка | - | *46* | *30* | | |
| 1994 | Реальные | 1220 | 922 | | | |
| | Установленные | 1220 | 948 | | | |
| | Ошибка | - | *-26* | | | |

**Рис.6**

Настолько серьезных ошибок, чтобы предположить, что данная модель неточная, нет.

Однако, несмотря на эту проверку, вполне вероятно, что полученная оценка может стать недостаточным ориентиром в будущем.

## 2.4 Другие методы получения коэффициентов развития

В свете дополнительной информации, можно скорректировать вычисленные коэффициенты развития. Этот метод, который использует прошлую информацию, может получать и точное приближение, но, более часто, нуждается в коррекции. Существует множество оснований преобразовывать коэффициенты развития. Например, изменения в методах бухгалтерского учета или в управлении исками могут изменить скорость, с которой регулируются иски. Это могло бы послужить началом для изменения коэффициентов развития и могло бы ощутимо отразиться в оценке будущих исковых выплат. Коэффициенты развития, найденные напрямую из имеющихся данных или установленные с помощью компетентного человека, всегда используются в одном и том же способе оценки неоплаченных исковых выплат.

Кроме того, цепочно-лестничный метод лучше применять для треугольника нетто-убыточности, чем для совокупных выплат, где нетто-убыточность для данного года развития и года событий — это выплаты, накопленные к этому моменту, включая год развития, деленные на общий премиальный доход, соответствующий данному году событий.

### 2.5 Обсуждение предположений, лежащих в основе цепочно-лестничного метода

Цепочно-лестничный метод базируется на предположении, что выплаты для каждого года событий развиваются одинаково. Иными словами, одинаковые коэффициенты развития используются для прогноза неоплаченных исков по каждому году событий. Преобразования соотношения, в котором возникают иски, может быть объединено под общим названием: ”поправка вручную” для коэффициентов развития.

Конечное предположение делается, когда цепочно-лестничный метод используется в соответствии с инфляцией. Предполагается, что будущая инфляция будет равна взвешенному среднему значению инфляции прошлых лет. Считается, что инфляция исков оказывает значительное влияние на формирование коэффициентов прогнозирования. Такое предположение может оказаться нереалистичным, и, чтобы выяснить это, оно будет рассмотрено более детально в следующем разделе. Когда речь идет о инфляции, важно помнить, что имеется ввиду инфляция исков. Поэтому, хотя стандартный способ измерения общей инфляции и может быть использован, уровень инфляции, приходящийся на иски, может отличаться довольно сильно. Например, на размер исковых выплат может повлиять судебное решение. Раздел 3 более детально освещает вопросы, связанные с этим.

## §3 Поправка на инфляцию

### 3.1 Цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию

#### Работа с инфляцией прошлых лет

Инфляция исков оказывает влияние на выплаты, описанные в треугольнике развития в соответствии с календарными годами. В рассматриваемой модели предполагается, что инфляция имеет одинаковый годовой уровень для всех исков, касающихся определенного года выплат. Каждый календарный год выплат соотносится с диагональю треугольника. Для иллюстрации, посмотрим снова на рисунок 1.

Когда нам нужна поправка на инфляцию, лучше рассматривать выплаты для каждого календарного года, чем общие накопленные суммы. Для начала надо вычислить возрастающие выплаты из совокупных, выделением их вдоль каждой строки. Та же операция была выполнена в разделе 2.2 и следующий рисунок можно сравнить с рисунком 6.

**Пример 15.5** Рисунок 7 показывает возрастающие (но не предусматривающие накопления) исковые выплаты для данных из рисунка 1.

**Возрастающие выплаты по искам в денежном выражении**

| **Год** | **Год развития** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **событий** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| 1992 | 786 | 624 | 806 | 224 | 79 |
| 1993 | 904 | 671 | 940 | 281 | |
| 1994 | 995 | 819 | 1066 | | |
| 1995 | 1220 | 922 | | | |
| 1996 | 1182 | | | | |

**Рис.7**

Предположим, что годовой уровень инфляции исковых величин за 12 месяцев соотносится со стоимостью в середине данного года следующим образом:

| | |
|---|---|
| 1993 | 5.1% |
| 1994 | 6.4% |
| 1995 | 7.3% |
| 1996 | 5.4% |

Для простоты также предполагаем, что выплаты осуществляются в середине каждого календарного года. Теперь можно вычислить индекс, чтобы преобразовать все выплаты к денежным величинам середины 1996 года.

Далее можно скорректировать выплаты, описанные на рисунке 7, с помощью коэффициентов инфляции. рисунок 8 показывает данные по возрастающим выплатам с поправкой на инфляцию.

**Возрастающие выплаты по искам в денежных величинах середины 1996 года**

| Год событий | Развитие 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1992 | 994 | 751 | 912 | 236 | 79 |
| 1993 | 1088 | 759 | 991 | 281 | |
| 1994 | 1125 | 863 | 1066 | | |
| 1995 | 1286 | 922 | | | |
| 1996 | 1182 | | | | |

**Рис.8**

Мы имеем простую форму таблицы выплат по искам с нарастающим итогом с поправкой на инфляцию, к которой может быть применен цепочно-лестничный метод.

Прогнозы выплат по искам с нарастающим итогом в денежных величинах середины 1996 года даны на рисунке 9.

**Прогнозы совокупных выплат в денежных величинах середины 1996 года**

| Год событий | Год развития 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1993 | | | | 3203 |
| 1994 | | | 3341 | 3431 |
| 1995 | | 3383 | 3701 | 3801 |
| 1996 | 2048 | 3138 | 3433 | 3526 |

**Рис.9**

## Работа с будущей инфляцией

Однако, прогнозы совокупных выплат не принимают в расчет будущую инфляцию. Чтобы предсказать реальные величины, необходим предполагаемый уровень будущей инфляции. Опять же, лучше преобразовывать не предусматривающие накопления данные, а не общие накопленные суммы, корректируя их с учетом будущей инфляции аналогичным предыдущему разделу образом.

**Пример 15.6** Применение годового уровня инфляции в 10% (на 30-ое июня) к данным рисунка 9 дает следующие исправленные прогнозы выплат по искам с нарастающим итогом.

**Прогнозы совокупных выплат в денежном выражении**

| Год событий | Год развития 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1993 | | | | 2888 |
| 1994 | | | 3196 | 3305 |
| 1995 | | 3435 | 3820 | 3953 |
| 1996 | 2135 | 3454 | 3847 | 3983 |

**Рис.10**

Резервы, которые необходимо иметь к концу 1996 года, составляют 5129.

## §4 Техника метода интервалов

Другая модель, позволяющая учитывать инфляцию, известна как метод интервалов. Для этого метода, возрастающие выплаты по искам в денежном выражении, предположительно, следуют тому же образцу, что и в цепочно-лестничном методе с поправкой на инфляцию, то есть существует постоянная доля исков (в реальном исчислении), выплачиваемая в каждый год развития. Предположив для удобства, что иски оплачиваются полностью к концу года развития 4, общую модель для этого метода можно выразить алгебраически следующим образом:

| Год событий | Год развития 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1992 | $U_0r_0\lambda_0$ | $U_0r_1\lambda_1$ | $U_0r_2\lambda_2$ | $U_0r_3\lambda_3$ | $U_0r_4\lambda_4$ |
| 1993 | $U_1r_0\lambda_1$ | $U_1r_1\lambda_2$ | $U_1r_2\lambda_3$ | $U_1r_3\lambda_4$ | |
| 1994 | $U_2r_0\lambda_2$ | $U_2r_1\lambda_3$ | $U_2r_2\lambda_4$ | | |
| 1995 | $U_3r_0\lambda_3$ | $U_3r_1\lambda_4$ | | | |
| 1996 | $U_4r_0\lambda_4$ | | | | |

**Рис.11**

где

$\lambda_{i+j}$ — коэффициент инфляции, относящийся ко всем выплатам, соответствующим году событий $i$ и году развития $j$.

$r_j$ — доля общих исковых выплат, соответствующих любому году событий, которая была бы выплачена в год развития $j$ при постоянном индексе инфляции, то есть при ее отсутствии. Это предполагает, что $r_0 + \ldots + r_4 = 1$, так как иски предполагаются полностью оплаченными к концу года развития 4. (то есть это коэффициент развития)

$U_i$ — общая величина исковых выплат, соответствующих году событий $i$, которая была бы выплачена при постоянном и равном 1 индексе инфляции. (Альтернативное определение: $U_i$ — общая величина исковых выплат, соответствующих году событий $i$, представленная в денежном выражении года, в котором индекс инфляции равен 1 (на момент 30-ого июня).)

Разумеется, величина, которая должна быть оценена, — это $U_i$.

Чтобы спрогнозировать данные по будущим выплатам, для выведения $\lambda_{i+j}$, $r_j$ и $U_i$ используется прошлая информация (приравниваем значение из каждой ячейки треугольника к алгебраическому выражению для этой ячейки). Очевидно, что это нельзя осуществить, пока неизвестно $U_i$, так как для того, чтобы исключить $U_i$ из уравнения требуется ее приближенное значение.

Простейший способ — это предположить, что $U_i$ пропорционально количеству исков, соответствующему году событий $i$ (обозначаемому $N_i$). Иными словами, это подразумевает, что существует параметр $c_1$, такой что $U_i = c_1 N_i$ для всех $i$. Конечно, количество исков также будет неизвестно, но, как правило, проще оценить ожидаемое число исков, чем их общую величину.

В сущности, наиболее общий подход, используемый в методе интервалов, состоит в предположении, что окончательное число исков может быть оценено, как постоянная доля числа исков, оплаченных в год развития 0. Другими словами, это подразумевает, что существует параметр $c_2$, такой что $N_i = c_2 n_i$ для всех $i$, где $n_i$ — количество исков в год рассмотрения 0 для года событий $i$.

Объединение этой информации с приближением для суммарных величин исков показывает, что существует параметр $c$, такой что $U_i = cn_i$ для всех $i$.

Затем можно разделить все не предусматривающие накопления (возрастающие) величины исков на количество исков, относящихся к году развития 0, и заменить переменные $U_i$ на $c$, с которым работать гораздо легче, так как оно постоянно.

Алгебраическая модель может быть описана, как показано на рисунке 12.

| Год | Год развития | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| событий | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1992 | $r_0\lambda_0$ | $r_1\lambda_1$ | $r_2\lambda_2$ | $r_3\lambda_3$ | $r_4\lambda_4$ |
| 1993 | $r_0\lambda_1$ | $r_1\lambda_2$ | $r_2\lambda_3$ | $r_3\lambda_4$ | |
| 1994 | $r_0\lambda_2$ | $r_1\lambda_3$ | $r_2\lambda_4$ | | |
| 1995 | $r_0\lambda_3$ | $r_1\lambda_4$ | | | |
| 1996 | $r_0\lambda_4$ | | | | |

**Рис.12**

Затем применим технику метода интервалов к суммам по диагоналям и по столбцам.

Суммы по диагоналям:

$r_0\lambda_0$
$(r_0+r_1)\lambda_1$
$(r_0+r_1+r_2)\lambda_2$
$(r_0+r_1+r_2+r_3)\lambda_3$
$(r_0+r_1+r_2+r_3+r_4)\lambda_4$

Суммы по столбцам:

$r_0(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$
$r_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$
$r_2(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$
$r_3(\lambda_3+\lambda_4)$
$r_4\lambda_4$

Учитывая тот факт, что $r_0+r_1+r_2+r_3+r_4=1$, последняя диагональная сумма равна $\lambda_4$. Она может быть оценена известными данными.

Теперь посмотрим на сумму последнего столбца.

$\lambda_4$ уже оценено и может использоваться для оценки $r_4$.

Далее вернемся к предпоследней диагональной сумме.

Так как $r_0+r_1+r_2+r_3+r_4=1$,

$$r_0+r_1+r_2+r_3=1-r_4$$

$r_4$ уже было оценено, так что эти данные можно использовать для оценки $\lambda_3$.

Теперь переходим к сумме по следующему столбцу и оцениваем $r_3$, и т.д.

Получив оценку параметрических значений, попытаемся спрогнозировать не произведенные выплаты. Иными словами, нам надо получить прогноз для нижнего треугольника. К сожалению, этих оценок параметров недостаточно для такого прогноза. Необходимы значения $\lambda_5$, $\lambda_6$, $\lambda_7$, $\lambda_8$.

Модель треугольника не произведенных выплат может быть описана следующим образом:

| **Год** | **Год развития** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **событий** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| 1993 | | | | $r_4\lambda_5$ |
| 1994 | | | $r_3\lambda_5$ | $r_4\lambda_6$ |
| 1995 | | $r_2\lambda_5$ | $r_3\lambda_6$ | $r_4\lambda_7$ |
| 1996 | $r_1\lambda_5$ | $r_2\lambda_6$ | $r_3\lambda_7$ | $r_4\lambda_8$ |

**Рис.13**

Если бы можно было получить оценки для будущих исков из внутренних данных, сейчас можно было бы использовать их. В других обстоятельствах, все, что можно сделать, — это обратить внимание на шаблон для $\lambda$ и попытаться спрогнозировать его. Оценочные значения $\lambda$ могут быть последовательно преобразованы в данные по инфляции исков, так как, возможно, по ним легче предположить будущие величины.

Полные вычисления описаны в следующем примере.

**Пример 15.7** Снова обратимся к данным рисунка 7. Предположим, что число исков, относящихся к году развития 0, для каждого года событий будут следующими:

| | |
|---|---|
| 1992 | 351 |
| 1993 | 387 |
| 1994 | 405 |
| 1995 | 452 |
| 1996 | 430 |

Деление данных из рисунка 7 на соответствующие количества исков дает:

**Абсолютная оценка прироста величины иска**

| **Год событий** | **Развитие 0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1992 | 2.239 | 1.778 | 2.296 | 0.638 | 0.225 |
| 1993 | 2.336 | 1.734 | 2.429 | 0.726 | |
| 1994 | 2.457 | 2.022 | 2.632 | | |
| 1995 | 2.699 | 2.040 | | | |
| 1996 | 2.749 | | | | |

**Рис.14**

К этим данным можно применить метод интервалов.

Суммы по диагоналям:

$$\begin{array}{c} 2.239 \\ 4.114 \\ 6.487 \\ 7.788 \\ 8.372 \end{array}$$

Суммы по столбцам:

$$\begin{array}{c} 12.480 \\ 7.574 \\ 7.357 \\ 1.364 \\ 0.225 \end{array}$$

Из последней диагональной суммы:

$$\hat{\lambda}_4 = 8.372$$

Заметим, что значок над $\lambda$ обозначает оценку.

Из суммы по последнему столбцу:

$$\hat{r}_4 = \frac{0.225}{\hat{\lambda}_4} = 0.027$$

Из предпоследней диагональной суммы:

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{7.788}{1 - \hat{r}_4} = 8.004$$

Из суммы предпоследнего столбца:

$$\hat{r}_3 = \frac{1.364}{8.004 + 8.372} = 0.083$$

и т.д. Вспомним, что $r_0 + r_1 + r_2 = 1 - r_3 - r_4$. Дальнейшие вычисления приводятся ниже:

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{6.487}{1 - 0.083 - 0.027} = 7.289$$

$$\hat{r}_2 = \frac{7.357}{7.289 + 8.004 + 8.372} = 0.311$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{4.114}{1 - 0.311 - 0.083 - 0.027} = 7.105$$

$$\hat{r}_1 = \frac{7.574}{7.105 + 7.289 + 8.004 + 8.372} = 0.246$$

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{2.239}{1 - 0.246 - 0.311 - 0.083 - 0.027} = 6.724$$

$$\hat{r}_0 = \frac{12.480}{6.724 + 7.105 + 7.289 + 8.004 + 8.372} = 0.333$$

Полезно поверить, чтобы $\hat{r}_0 + \hat{r}_1 + \hat{r}_2 + \hat{r}_3 + \hat{r}_4 = 1$

В некоторых случаях сумма не равняется строго 1; это связано с небольшими ошибками округления, которые возникают, если вычисления проводит не компьютер. Полученные значения будут использоваться для оценки неоплаченных исков. И в данном случае, ошибки округления не будут играть значимую роль.

Теперь можно использовать оценки параметров, чтобы получить таблицу "установленных" значений, то есть значений исков, использующих оценочные значения параметров.

Рисунок 15 показывает установленные значения для данной модели до умножения на количества исков.

**Абсолютная оценка прироста величины иска**

| **Год событий** | **Развитие** 0 | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1992 | 2.239 | 1.748 | 2.267 | 0.664 | 0.226 |
| 1993 | 2.366 | 1.793 | 2.489 | 0.695 | |
| 1994 | 2.427 | 1.969 | 2.604 | | |
| 1995 | 2.665 | 2.060 | | | |
| 1996 | 2.788 | | | | |

**Рис.15**

Можно сравнить рисунки 15 и 14, как было сделано в разделе 2.3, чтобы оценить насколько верно устанавливаются данные с помощью такой модели.

Оценки параметров, выведенные в предыдущем примере:

$$\hat{\lambda}_0 = 6.724$$
$$\hat{\lambda}_1 = 7.105$$
$$\hat{\lambda}_2 = 7.289$$
$$\hat{\lambda}_3 = 8.004$$
$$\hat{\lambda}_4 = 8.372$$

Эти величины можно представить в виде множества годовых коэффициентов инфляции исков и последовательно расширить его, чтобы предсказать оставшиеся члены, до $\hat{\lambda}_8$.

Коэффициенты инфляции могут быть выведены с помощью нахождения последовательных соотношений параметров.

$$
\begin{array}{lll}
\hat{\lambda}_0 & 6.724 & \\
 & & \mathit{1.057} \\
\hat{\lambda}_1 & 7.104 & \\
 & & \mathit{1.026} \\
\hat{\lambda}_2 & 7.289 & \\
 & & \mathit{1.098} \\
\hat{\lambda}_3 & 8.004 & \\
 & & \mathit{1.046} \\
\hat{\lambda}_4 & 8.372 &
\end{array}
$$

Таким образом, исковая инфляция варьируется от 2.6% до 9.8%. Предполагаемая будущая инфляция — 5.5%, что приблизительно является средним значением оцененных коэффициентов.

После последовательного умножения на 1.005, получаем прогнозы для требуемых параметров:

$$
\begin{array}{cc}
\hat{\lambda}_4 & 8.372 \\
\hat{\lambda}_5 & 8.332 \\
\hat{\lambda}_6 & 9.318 \\
\hat{\lambda}_7 & 9.831 \\
\hat{\lambda}_8 & 10.371
\end{array}
$$

Прогнозы для этих параметров могут использоваться для предсказания неоплаченных исков.

Рисунок 13 представляет собой модель неоплаченных исков. Оценки значений параметров:

$$
\begin{aligned}
\hat{r}_1 &= 0.246 \\
\hat{r}_2 &= 0.311 \\
\hat{r}_3 &= 0.083 \\
\hat{r}_4 &= 0.027
\end{aligned}
$$

Это дает следующие оценки:

**Абсолютная оценка прироста величины иска**

| **Год событий** | **Развитие** **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| 1993 | | | | 0.238 |
| 1994 | | | 0.733 | 0.252 |
| 1995 | | 2.747 | 0.773 | 0.265 |
| 1996 | 2.173 | 2.898 | 0.816 | 0.280 |

**Рис.16**

Наконец, умножение на количества исков, полученные выше, дает прогнозы для не произведенных выплат:

**Возрастающие исковые выплаты в денежном выражении**

| **Год событий** | **Развитие** **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| 1993 | | | | 92 |
| 1994 | | | 297 | 102 |
| 1995 | | 1242 | 349 | 120 |
| 1996 | 934 | 1246 | 351 | 120 |

**Рис.17**

Резервы, которые необходимо иметь к концу 1996, равны 4853.