

Модель Бюльмана-Штрауба

Страховая компания продает полисы страхования, каждый из которых принадлежит одной из трех возможных групп риска. Количество исков внутри каждой группы имеет распределение Пуассона с параметром λ , а размер иска имеет гамма-распределение с функцией плотности

$$f_x = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$$

и параметрами α и β . Количество исков и размер исков независимы внутри группы. Данные по каждой группе представлены в таблице:

Группа риска	Относительная частота	Параметр распределения количества исков внутри группы	Параметры распределения размера иска внутри группы
1	$p = 0,2$	$\lambda = 21$	$\alpha = 4; \beta = \frac{1}{2}$
2	$p = 0,4$	$\lambda = 32$	$\alpha = 5; \beta = \frac{1}{3}$
3	$p = 0,4$	$\lambda = 43$	$\alpha = 3; \beta = \frac{1}{2}$

Вычислите доверительную премию модели Бюльмана для агрегированных убытков при условии, что по данным прошлого года предъявлено 28 исков, средний размер которых составил 100 руб.

Варианты ответа:

а) 95,69

б) 87,31

в) 88,23

г) 75,16

д) 56,82

Сумма баллов: 6

Решение.

Группа риска	Ожидаемое количество исков в группе $p\lambda$	Вероятность появления каждого типа распределения размера иска	Условное мат. ожидание	Условная дисперсия
1	$0,2 \cdot 21 = 4,2$	$\frac{4,2}{4,2 + 12,8 + 17,2} = 0,12281$	8	16
2	$0,4 \cdot 32 = 12,8$	$\frac{12,8}{4,2 + 12,8 + 17,2} = 0,37427$	15	45
3	$0,4 \cdot 43 = 17,2$	$\frac{17,2}{4,2 + 12,8 + 17,2} = 0,50292$	6	12

Условное мат. ожидание находим по формуле

$$E(X|\Gamma) = \mu_{x(\Gamma)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Условная дисперсия находим по формуле

$$Var(X|\Gamma) = \sigma^2(\Gamma) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Теперь промежуточные вычисления:

$$E(X) = E[E(X|\Gamma)] = 0,12281 \cdot 8 + 0,37427 \cdot 15 + 0,50292 \cdot 6 = 9,61405$$

$$E[Var(X|\Gamma)] = 0,12281 \cdot 16 + 0,37427 \cdot 45 + 0,50292 \cdot 12 = 24,84215$$

$$E[E(X|\Gamma)^2] = 0,12281 \cdot 8^2 + 0,37427 \cdot 15^2 + 0,50292 \cdot 6^2 = 110,17571$$

$$Var[E(X|\Gamma)] = E[E(X|\Gamma)^2] - E[E(X|\Gamma)]^2 = 110,17571 - 9,61405^2 = 17,74575$$

Следовательно, безусловная дисперсия X :

$$Var(X) = E[Var(X|\Gamma)] + Var[E(X|\Gamma)] = 24,84215 + 17,74575 = 42,5879$$

Параметр доверительности модели Бюльмана

$$\frac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]} = \frac{E[Var(X|\Gamma)]}{Var[E(X|\Gamma)]} = \frac{24,84215}{17,74575} = 1,39989$$

Согласно теории правдоподобия коэффициент доверительности модели Бюльмана равен

$$Z = \frac{n}{n + \frac{E[s^2(\theta)]}{var[m(\theta)]}} = \frac{28}{28 + 1,39989} = 0,95238$$

Премия доверительности по Бюльману

$$P = Z \bar{X} + (1 - Z) \mu$$

По условию, средний размер иска $\bar{X} = 100$ руб., $\mu = E(X) = 9,61405$.
Следовательно

$$P = 0,95238 \cdot 100 + (1 - 0,95238)9,61405 = 95,69582$$

Ответ: А

□