Вейбулл, подгонка распределений, метод процентилей

Страховая компания предполагает, что убытки по определенной категории случаев имеют распределение Вейбулла с функцией плотности

$$f(x) = \alpha\gamma\, x^{\gamma-1}\, e^{-\alpha x^{\gamma}}$$

Первый и третий квартили этого распределения равны, соответственно, $x_{0,25} = 0{,}5;\ x_{0,75} = 10$. Используя метод процентилей, оцените параметры данного распределения. В ответе укажите значение параметра γ.

Варианты ответа:

а) 0,456

б) 0,479

в) 0,502

г) 0,525

д) 0,548

Сумма баллов: 4

Решение:

Функция распределения для одного иска имеет вид:

$$DF(x) = \int_0^x \alpha\gamma\, t^{\gamma-1}\, e^{-\alpha t^{\gamma}}\, dt =$$

$$= -\alpha\gamma \int_0^x \frac{t^{\gamma-1}}{\alpha\gamma} \cdot \frac{1}{t^{\gamma-1}} de^{-\alpha t^{\gamma}} = 1 - e^{-\alpha x^{\gamma}}$$

Нижняя и верхняя квартили являются решениями, соответственно, уравнений:

$$\begin{cases} 1 - e^{-\alpha x^{\gamma}} = 0{,}25 \\ 1 - e^{-\alpha x^{\gamma}} = 0{,}75 \end{cases}$$

Откуда

$$x_1 = \left(\frac{\ln\frac{4}{3}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad x_2 = \left(\frac{\ln 4}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Оценки для $\bar{\alpha}$ и $\bar{\gamma}$ находятся, как решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = x_{0,25} \\ x_2 = x_{0,75} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln\frac{4}{3} = \alpha {x_{0,25}}^{\gamma} \\ \ln 4 = \alpha {x_{0,75}}^{\gamma} \end{cases}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\ln\left(\frac{\ln\frac{4}{3}}{ln4}\right)}{\ln\left(\frac{x_{0,25}}{x_{0,75}}\right)} = \frac{-1,57253}{-2,99573} = 0,52492$$

$$\bar{\alpha} = x_{0,75}^{-\gamma}\ \ln 4 = 0,41394$$

Ответ: Г

[3-43-4]

□

□□□