ТЕОРИЯ РИСКА

ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ И СООТНОШЕНИЯ

Оглавление

□ □ □

1. Основы теории вероятностей

Гамма-функция и функция Эйлера

Гамма-функция

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1}e^{-t}dt$$

Функция Эйлера (функция ошибок):

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

Формула Стирлинга:

$$k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$$

Связь факториала с гамма-функцией:

$$k! = \Gamma(k+1)$$

$$\Gamma(k) = (k-1)!$$

$$(k-1)! = \int_0^\infty t^{k-1}e^{-t}dt \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{k-1}{e}\right)^{k-1}$$

В общем виде:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Математические характеристики случайной величины

Мат. ожидание:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Дисперсия:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - (M[X])^2$$

Свойства мат. ожидания

$$E(aX + b) = a\,E(X) + b$$

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

Для независимых случайных величин:

$$E(X_1\,X_2) = E(X_1)\,E(X_2)$$

Свойства дисперсии

$$var(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - E^2(X)$$

$$var(aX + b) = a^2\,var(X)$$

Для независимых случайных величин:

$$var(X_1 + X_2) = var(X_1) + var(X_2)$$

Коэффициент вариации – степень риска:

$$C_X = \frac{\sigma_X}{m_X} = \frac{\sqrt{DX}}{MX}$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = \frac{E(X - m_X)^3}{{C_X}^3}$$

□

Характеристики смешанного распределения

Если $g(x)$ – функция распределения ущербов, и
$P(X = x)$ – соответствующие этим ущербам вероятности в дискретном случае и
$f(x)$ – плотность распределения вероятностей в непрерывном случае. Тогда:

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum g(x)P(X = x) \\ \int g(x)f(x)dx \end{cases}$$

$$E(X) = \begin{cases} \sum x\,P(X = x) \\ \int x\,f(x)\,dx \end{cases}$$

$$E(X^2) = \begin{cases} \sum x^2 \, P(X = x) \\ \int x^2 \, f(x) \, dx \end{cases}$$

□

2. Функция моментов и ее свойства

Первое определение ФПМ (MGF) – функция, производящая моменты

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^k p_k\,,\ t \in (0,\ 1]$$

Развитие определения ФПМ:

$$\varphi_\xi(t) = M\left(e^{t\xi}\right) = \sum e^{tx} \cdot P(X = x)$$

$$M_X(t) = E[e^{tx}]$$

Определение ФПМ, MGF в общем виде:

MGF – функция, производящая моменты или производящая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \sum e^{tx}\, P(X = x) \\ \int e^{tx}\, f(x)\, dx \end{cases}$$

Свойства производных производящей функции:

$$M_X'(t) = E(x)$$

$$M_X''(t) = E(X^2)$$

$$M_X'''(t) = E(X^3)$$

Свойства функции моментов – ФПМ

Свойство 1: Момент порядка n – это производная ФПМ порядка n:

$$E[X^n] = \frac{d^n}{dt^n} M(t)|_{t=0}$$

Свойство 2: Отклонение СВ от момента порядка n - это производная логарифма ФПМ порядка n:

$$E[(X - E[X])^n] = \frac{d^n}{dt^n} \ln M(t)|_{t=0}$$

□

3. Классические распределения теории вероятностей

Дискретное равномерное распределение

Параметры: $a, b, h \quad a < b, \quad h > 0, \quad b - a$ - кратно h.

Функция вероятностей PF:

$$p(x) = \frac{h}{b - a + h} \qquad x = a, a + h, a + 2h, \dots, b - h, b$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$G(s) = \frac{h}{b - a + h}\left(\frac{s^{b+h} - s^a}{s^h - 1}\right)$$

Производящая функция моментов MGF:

$$M(t) = \frac{h}{b - a + h}\left(\frac{e^{(b+h)t} - e^{at}}{e^{ht} - 1}\right)$$

Мат. ожидание:

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$

Дисперсия:

$$var(X) = \frac{(b - a)(b - a + 2h)}{12}$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = 0$$

□

Биномиальное распределение

Обозначение и параметры:

$$Bin(n, p)$$

Функция вероятностей PF:

$$p(x) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$G(s) = (q + ps)^n$$

Производящая функция моментов MGF:

$$M(t) = (q + pe^t)^n$$

Мат. ожидание:

$$E(X) = np$$

Дисперсия:

$$var(X) = npq$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}$$

□

Отрицательное биномиальное распределение (тип I)

Параметры: k, p $\quad k$ – натуральное, $\quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$

Функция вероятностей PF:

$$p(x) = C_{x-1}^{k-1} p^k q^{x-k} \qquad x = k, k+1, k+2 \dots$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$G(s) = \left(\frac{ps}{1 - qs}\right)^k$$

Производящая функция моментов MGF:

$$M(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t}\right)^k$$

Мат. ожидание:

$$E(X) = \frac{k}{p}$$

Дисперсия:

$$var(X) = \frac{kq}{p^2}$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = \frac{2 - p}{\sqrt{kq}}$$

□

Отрицательное биномиальное распределение (тип II)

Параметры: k, p $\quad k$ – натуральное, $\quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$

Функция вероятностей PF:

$$p(x) = \frac{\Gamma(k+x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(k)} p^k q^x \qquad x = 0, 1, 2 \dots$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$G(s) = \left(\frac{p}{1-qs}\right)^k$$

Производящая функция моментов MGF:

$$M(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^k$$

Мат. ожидание:

$$E(X) = \frac{kq}{p}$$

Дисперсия:

$$var(X) = \frac{kq}{p^2}$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = \frac{2-p}{\sqrt{kq}}$$

□

Геометрическое распределение

Геометрическое распределение является частным случаем отрицательного биномиального распределения с параметром $k = 1$.

Обозначение и параметры:

$$Geo(p = \alpha)$$

Функция вероятностей PF:

$$P(X = m) = pq^{m-1}$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$G(s) = \left(\frac{p}{1-qs}\right)^k$$

Производящая функция моментов MGF:

$$M(t) = \frac{pt}{1-qt}$$

Мат. ожидание:

$$E[X] = \frac{q}{p}$$

Дисперсия:

$$var[X] = \frac{q}{p^2}$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = \frac{2 - p}{\sqrt{kq}}$$

□

Распределение Пуассона

Обозначение и параметры:

$$Poi(\lambda = \mu), \qquad \mu > 0$$

Функция вероятностей PF:

$$P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

Функция распределения DF:

$$F(x) = \frac{\Gamma(k + 1, \mu)}{k!}$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$G(s) = e^{\mu(s-1)}$$

Производящая функция моментов MGF:

$$M(t) = e^{\mu(e^t - 1)}$$

Мат. ожидание:

$$E[X] = \mu$$

Дисперсия:

$$var[X] = \mu$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

Экспоненциальное распределение

Обозначение и параметры:

$$exp(\lambda) \quad \lambda > 0$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Функция распределения DF:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Производящая функция моментов MGF:

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \quad t < \lambda$$

Мат. ожидание:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Дисперсия:

$$var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Момент порядка r:

$$E(X^r) = \frac{\Gamma(1+r)}{\lambda^r} \qquad r = 1, 2, \dots$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = 2$$

□

Стандартное нормальное распределение

Обозначение и параметры:

$$N(0,1)$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Функция распределения DF:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Производящая функция моментов MGF:

$$M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Мат. ожидание:

$$E(X) = 1$$

Дисперсия:

$$var(X) = 0$$

Моменты порядка r

$$M(X^r) = \frac{1}{\sqrt{2^r}} \frac{(1+r)}{1+\frac{r}{2}} \qquad r = 2, 4, 6 \dots$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = 0$$

□

Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Обозначение и параметры:

$$N(\mu, \sigma)$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Функция распределения DF:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right)$$

Производящая функция моментов MGF:

$$M(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Мат. ожидание:

$$E(X) = \mu$$

Дисперсия:

$$var(X) = \sigma^2$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = 0$$

□

4. Распределения ущербов

Непрерывное равномерное распределение

Обозначение и параметры:

$$U(a,b) \quad a < b$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Функция распределения DF:

$$DF(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Производящая функция моментов MGF:

$$M(t) = \frac{1}{(b-a)t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$$

Мат. ожидание:

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

Дисперсия:

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Момент порядка r:

$$E(X^r) = \frac{1}{(b-a)(r+1)}\left(b^{r+1} - a^{r+1}\right) \qquad r = 1, 2, \dots$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = 0$$

□

Логнормальное распределение

Обозначение и параметры:

$$log(\mu, \sigma^2)$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} \quad x > 0$$

Функция распределения DF:

$$DF(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$

Производящая функция моментов MGF:

Мат. ожидание:

$$EX = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

Дисперсия:

$$DX = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Момент порядка r:

$$E(X^r) = e^{r\mu + \frac{1}{2}r^2\sigma^2} \qquad r = 1, 2, \dots$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = \left(e^{\sigma^2} + 2\right)\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

□

Гамма-распределение

Обозначение и параметры:

$$Gamma(\alpha, \lambda) \qquad \alpha > 0, \quad \lambda > 0$$

Производящая функция вероятностей PGF:

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \qquad x > 0$$

Производящая функция моментов MGF:

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha} \qquad t < \lambda$$

Мат. ожидание:

$$EX = \frac{\alpha}{\lambda}$$

Дисперсия:

$$DX = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Момент порядка r:

$$E(X^r) = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)\lambda^r} \qquad r = 1, 2, \dots$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

□

Хи-квадрат распределение

Распределение Хи-квадрат с υ (ипсилон) степенями свободы аналогично гамма распределению с параметрами

$$\alpha = \frac{\upsilon}{2} \text{ и } \lambda = \frac{1}{2}$$

□

Распределение Парето (двухпараметрическое)

Параметры α, λ $(\alpha > 0, \lambda > 0)$

PDF:

$$f(x) = \frac{\alpha\, \lambda^{\alpha}}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0$$

DF

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha}$$

Моменты

$$E(x) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \alpha > 0$$

$$var(x) = \frac{\alpha\, \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2$$

$$E(X^r) = \frac{\Gamma(\alpha - r)\Gamma(1 + r)}{\Gamma(\alpha)} \lambda^r \qquad r = 1, 2, \ldots < \alpha$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = \frac{2(\alpha + 1)}{\alpha - 3} \sqrt{\frac{\alpha - 2}{\alpha}}, \quad \alpha > 3$$

Распределение Парето (трехпараметрическое)

Параметры α, λ, k $(\alpha > 0,\ \lambda > 0,\ k > 0)$

PDF:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + k)\, \lambda^{\alpha}\, x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(k)\, (\lambda + x)^{\alpha+k}}, \quad x > 0$$

Моменты

$$E(x) = \frac{k\lambda}{\alpha - 1}, \alpha > 0$$

$$var(x) = \frac{k(k + \alpha - 1)\,\lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2$$

$$E(X^r) = \frac{\Gamma(\alpha - r)\Gamma(k + r)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(k)}\lambda^r \qquad r = 1, 2, \ldots < \alpha$$

Коэффициент асимметрии:

□

Распределение Бурра

Распределение Бура

Параметры: $\alpha, \lambda, \gamma (\alpha > 0, \lambda > 0, \gamma > 0)$

PDF: $$f(x) = \frac{\alpha\gamma\lambda^{\alpha} x^{\gamma-1}}{(\lambda + x^{\gamma})^{\alpha+1}}, \qquad x > 0$$

DF: $$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x^{\gamma}}\right)^{\alpha}$$

Моменты: $$E(X^r) = \Gamma\left(\alpha - \frac{r}{\gamma}\right)\Gamma\left(1 + \frac{r}{\gamma}\right)\frac{\lambda^{r/\gamma}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad r = 1,2,3,\ldots, r < \alpha\gamma$$

Распределение Вейбулла

Распределение Вейбулла

Параметры: $c, \gamma (c > 0, \gamma > 0)$

PDF: $f(x) = c\gamma x^{\gamma-1} e^{-cx^{\gamma}}, \qquad x > 0$

DF: $F(x) = 1 - e^{-cx^{\gamma}}$

Моменты: $$E(X^r) = \Gamma\left(1 + \frac{r}{\gamma}\right)\frac{1}{c^{r/\gamma}}, \qquad r = 1,2,3,\ldots$$

Бета-распределение

Обозначение и параметры: $Beta(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0, \ \beta > 0 \quad 0 < x < 1$

PDF:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1}$$

Моменты:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

$$E(X^r) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\,\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha + \beta + r)}$$

Коэффициент асимметрии:

$$\gamma_X = \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \beta + 2}\sqrt{\frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha\,\beta}}$$

□

5. Подгонка распределений

Метод моментов

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Метод максимального правдоподобия

Алгоритм применения метода оценки максимального правдоподобия:

Выпишите функцию правдоподобия –предполагаемую функцию распределения с ее естественными параметрами

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \cdot \prod_{1}^{m} P(X > M)$$

Прологарифмируйте эту функцию - это значительно упростит вычисления.

$$\ln\big(L(\theta)\big) = l(\theta)$$

Продифференцируйте функцию правдоподобия по каждому неизвестному параметру и приравняйте полученные выражения к нулю.

$$\frac{d}{d\theta} l\big(\hat{\theta}\big) = 0$$

Решите полученное уравнение или систему уравнений – полученные значения параметров и есть искомые оценки;

Проверьте, что найденные значения параметров действительно максимизируют функцию правдоподобия.

Метод процентилей

Квартиль уровня α есть некоторое число t, такое, что $F(t) = P(X < t) = \alpha$.

Верхний квартиль – квартиль уровня 75%. Медиана – квартиль уровня 50%. Нижний квартиль – квартиль уровня 25%.

□

6. Перестрахование

Квотный (пропорциональный) договор

Мат. ожидание размера выплаты от страховщика и перестраховщика

$$EX_{in} = \alpha\, EX \qquad \text{и} \qquad EX_{re} = (1-\alpha)\, EX$$

Дисперсия размера выплаты от страховщика и перестраховщика

$$VAR\, X_{in} = \alpha^2\, VAR\, X \qquad \text{и} \qquad EX_{re} = (1-\alpha)^2\, VAR\, X$$

Договор эксцедента убытка

$$X_{In} = \begin{cases} X & \text{если } X \le M \\ M & \text{если } X > M \end{cases} \qquad X_{Re} = \begin{cases} 0 & \text{если } X \le M \\ X - M & \text{если } X > M \end{cases}$$

Мат. ожидание выплаты страховщика:

$$E(X_{In} = Y) = \int_0^M x f(x) dx + MP\,(X > M)$$

Дисперсия размера выплаты от страховщика:

$$EX_{in}^2 = \int_0^M x^2 f(x) dx + M^2\, P(X > M)$$

Мат.ожидание размера выплаты от перестраховщика:

$$EX_{re} = \int_M^\infty (x - M) f(x) dx = EX - EX_{in}$$

Дисперсия размера выплаты от перестраховщика:

$$EX_{re}^2 = \int_M^\infty (x - M)^2 f(x) dx$$

Обратите внимание, что

$$VARX \neq VARX_{in} + VARX_{re}$$

В общем виде, ФПМ выплат страховщика:

$$M_Y(t) = E(e^{t\,X_{In}}) = \int_0^M e^{tx} f(x) dx + e^{t\,M} P\,(X > M)$$

Мат. ожидание выплат перестраховщика:

$$E[g(X)] = \int_0^\infty g(x) f(x) dx$$

а) Если убыток распределен нормально, т. е. $f_X(x) \sim N(\mu, \sigma^2)$, то мат. ожидание величины выплат на интервале $[L, U]$:

$$\int_L^U x f_X(x) dx = \mu(\Phi(U') - \Phi(L')) - \sigma(\phi(U') - \phi(L'))$$

б) Если убыток распределен по экспоненциальному закону, т. е. $f_X(x) \sim Exp(\lambda)$, то мат. ожидание величины выплат на интервале $[L, U]$:

$$\int_L^U x f(x) dx = \int_L^U x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left(L + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda L} - \left(U + \frac{1}{\lambda}\right)\, e^{-\lambda U}$$

□

Условное распределение

Плотность распределения случайной величины X_{Re}:

$$f_R(r) = \frac{f_X(r + M)}{1 - F_X(M)}$$

Условное матожидание и дисперсия

$$E(Y) = E[E(Y|X)]$$

$$var(Y) = var[E(Y|X)] + E[var(Y|X)]$$

□

7. Обобщенные распределения

Производящая функция обобщенного распределения

$$G_S(t) = G_N[G_X(t)]$$

Моменты обобщенного распределения $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$:

$$E[S] = E[N]\, E[X]$$

$$Var[S] = E[N]\, Var[X] + Var[N]\, (E[X])^2$$

MGF:

$$M_S(t) = E(e^{ts}) = E\big(E(e^{ts}|N)\big) = E(M_X(t)^N) = E\big(e^{N \ln M_X(t)}\big) = M_N(t)[\ln M_X(t)]$$

т. е.

$$M_S(t) = M_N(t)[\ln M_X(t)]$$

□

Обобщенное распределение Пуассона

Величина индивидуального иска имеет распределение $Gamma(\alpha, \beta)$ и параметр Пуассона равен $\lambda = E(N)$:

$$M_S(t) = exp\left(\lambda\left(\left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha} - 1\right)\right)$$

Математическое ожидание:

$$E(S) = \lambda m_1$$

Дисперсия:

$$var(S) = \lambda m_2$$

Третий центральный момент:

$$\lambda m_3$$

При этом: $m_r = E(X^r)$

□

Обобщенное отрицательное распределение

Величина индивидуального иска имеет биномиальное распределение с параметрами m и q, тогда производящая функция вероятностей обобщенного отрицательного биномиального распределения с параметрами k и p:

$$G_S(t) = G_N\big(G_X(t)\big) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)\,(1 - q + qt)^m}\right)^k \quad \square$$

8. Модель индивидуального риска

Если $N \sim Poi(\lambda)$, то выполняется $ES = \lambda\, EX$ и $varS = \lambda\, EX^2$

Пусть X_i- независимы и одинаково распределены, $EX_i = b$ и $varX_i = \sigma^2$, а убыток наступает с вероятностью $q_,$ тогда

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$E[S] = nq\, b$$

$$var[S] = nq\sigma^2 + nq(1-q)b^2$$

$$N \sim Binomial(n, q) \qquad N \doteqdot Poisson\left(\sum q_i\right) \qquad (n \text{ велико})$$

$$E[S] = \sum_i b_i q_i \qquad V_{ar}[S] = \sum_i b_i^2 q_i (1 - q_i)$$

$$skew[S] = \sum_i b_i^3 q_i (1 - q_i)(1 - 2q_i)$$

$$E[S] = \sum_i \mu_i q_i \qquad V_{ar}[S] = \sum_i [\sigma_i^2 q_i + \mu_i^2 q_i (1 - q_i)]$$

□

9. Модель коллективного риска

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

Рекурсивная формула (обобщенное распределение Пуассона)

$$p_S(0) = e^{-\lambda} \qquad p_S(s) = \lambda \sum_{0<x\le s} \frac{x}{s}\, p_X(x)\, p_S(s-x), \quad s = 1, 2, \ldots$$

Итерационная формула для вероятностной функции

$$p_N(n) = p_N(n-1)\left(a + \frac{b}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Производящая функция вероятностей

$$G_N'(t) = \left(\frac{a+b}{1-at}\right) G_N(t)$$

Рекурсивная формула (общий случай обобщенного распределения)

$$p_S(0) = p_N(0)$$

$$p_S(s) = \sum_{x=1}^{s} \left(a + b\frac{x}{s}\right) p_X(x)\, p_S(s-x), \quad s = 1,2, \ldots$$

Смешанное гамма-распределение

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda} + k \qquad V_{ar}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2} \qquad skew[X] = \frac{2\alpha}{\lambda^3}$$

$$2\alpha(X-k) \sim \chi^2_{2\alpha}$$

□

10. Теория разорения

Вероятности разорения находятся:

- из общих соображений
- с помощью нормальной аппроксимации распределения убытков
- с помощью коэффициента поправки

Капитал компании:

$$U_t = U_0 + ct - S_t$$

Уравнение на коэффициент поправки:

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r)$$

Вероятность разорения на бесконечном горизонте: e^{-rU_0}

□

11. Апостериорное распределение

Формулы Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Апостериорное распределение $f(\theta|\underline{x})$ с параметром θ связано с априорным распределением через функцию правдоподобия $f(\underline{x}|\theta)$:

$$f(\theta|\underline{x}) \propto f(\theta) \cdot f(\underline{x}|\theta)$$

$$\text{Апостериорное распределение} \propto \text{Априорное распределение} \propto \text{Правдоподобие}$$

Оценки параметров

- Квадратичная функция ущерба – среднее апостериорного распределения
- Абсолютная функция ущерба – медиана апостериорного распределения
- Бинарная функция ущерба – мода апостериорного распределения

Функция ущерба		Байесовская оценка θ
Квадратичная ошибка ущерба	$(\bar{\theta} - \theta)^2$	мат. ожидание апостериорной функции вер.
Абсолютная ошибка ущерба	$\lvert\bar{\theta} - \theta\rvert$	медиана апостериорной функции вероятности
Бинарная ошибка ущерба	$I[\bar{\theta} \neq \theta]$	мода апостериорной функции вероятности

Таблица взаимосвязей
функции правдоподобия, априорного и апостериорного распределения

		Функция распределения параметра	
Функция правдоподобия выборки НОРС величин $X_1, \dots, X_n$	Неизвестный параметр	априорная	апостериорная
$Posson(\lambda)$	$\lambda > 0$	$Exp(\lambda')$	$Gamma\left(\sum x + 1, n + \lambda'\right)$
$Exp(\lambda)$			$Gamma\left(n + 1, \sum x + \lambda'\right)$
$Gamma(\alpha, \lambda)$			$Gamma\left(an + 1, \sum x + \lambda'\right)$
$Exp(\lambda)$	$\lambda > 0$	$Gamma(\alpha', \lambda')$	$Gamma^*\left(n + \alpha', \sum x + \lambda'\right)$
$Gamma(\alpha, \lambda)$			$Gamma^*\left(an + \alpha', \sum x + \lambda'\right)$
$B(m, p)$	$0 < p < 1$	$Beta(\alpha', \beta')$	$Beta^*\left(\sum x + \alpha', nm - \sum x + \beta'\right)$
$Geo(p)$			$Beta^*\left(n + \alpha', \sum x - n + \beta'\right)$
$N(\mu, \sigma^2)$	$-\infty < \mu < \infty$	$N(\mu', \sigma'^2)$	$N^*\left(\dfrac{\frac{\sum x}{\sigma^2} + \frac{\mu'}{\sigma'^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma'^2}}, \quad \dfrac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma'^2}}\right)$
$LogN(\mu, \sigma^2)$	$-\infty < \mu < \infty$	$U(-\infty, \infty)$	$N\left(\frac{1}{n} \sum logx, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
$N(\mu, \sigma^2)$			$N\left(\frac{1}{n} \sum x, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
$Exp(\lambda)$	$\lambda > 0$	$U(0, \infty)$	$Gamma\left(n + 1, \sum x\right)$
$Gamma(\alpha, \lambda)$			$Gamma\left(an + 1, \sum x +\right)$
$Geo(p)$	$0 < p < 1$	$U(0, 1)$	$Beta\left(n + 1, nm - \sum x - n + 1\right)$
$B(m, p)$			$Beta\left(\sum x + 1, nm - \sum x + 1\right)$
$NB(K, p)$			$Beta\left(nk + 1, nm - \sum x + 1\right)$

12. Теория правдоподобия

$$E[Loss(\bar{\theta},\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} Loss(\bar{\theta},\theta) f_{apost}(\theta)d\theta$$

Poi-Gamma модель

$$N\sim Poi(\theta), \theta\sim\Gamma(\alpha,\lambda) \Rightarrow \theta|x\sim\Gamma\left(\alpha+\sum x_i, \lambda+n\right)$$

$$Z = \frac{n}{\beta+n}$$

Нормально-нормальная модель

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \mu\sim N(\mu_0,\sigma_0^2) \Rightarrow \mu|x\sim N(\mu_*,\sigma_*^2)$$

$$\mu_* = \frac{\frac{n\bar{x}}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}} \qquad \sigma_* = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}}$$

$$Z = \frac{n}{n+\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}}$$

Байесовская модель 1

Пусть $X_{ij}, i = 1,\ 2,\ \dots N; j = 1,\ 2,\ \dots n$ – представляет собой совокупность одинаково распределенных требований по i-му риску в j-году, причем это распределение зависит от некоторого фиксированного, но неизвестного параметра θ, такого что средним значением $\overline{X}$ для всех j является некоторая функция от θ, обозначаемая через $m(\theta)$.

Целью модели является нахождение оценки $E[m(\theta)|x]$ которая и есть оценка правдоподобия с коэффициентом доверия Z.

Среднее требование по годам равно:

$$\overline{X_\iota} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$$

Среднее требование по всем рискам:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overline{X_\iota}$$

Оцениваемая величина	Оценочная функция
$E[m(\theta)]$	$= \overline{X}$
$E[s^2(\theta)]$	$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}_{\iota}\right)^2\right\}$
$Var[m(\theta)]$	$= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\overline{X}_{\iota}-\overline{X})^2 - \frac{1}{n\,N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}_{\iota}\right)^2\right\}$

Коэффициент доверия

$$Z = \frac{n}{n + \frac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]}}$$

Эмпирическая байесовская оценка объема совокупных требований:

$$E[m(\theta)|x] = Z\overline{X} - (1-Z)E[m(\theta)]$$

Байесовская модель 2

Пусть $Y_{ij}, i = 1,\ 2,\ \ldots N; j = 1,\ 2,\ \ldots n$ – представляет собой совокупность одинаково распределенных требований по i-му риску в j-году, а

$P_{ij}, i = 1,\ 2,\ \ldots N; j = 1,\ 2,\ \ldots n$ – соответствующий объем риска.

Распределение требований зависит от некоторого фиксированного, но неизвестного параметра θ, такого что средним значением $\overline{X}$ для всех j является некоторая функция от θ, обозначаемая через $m(\theta)$.

Целью модели является нахождение оценки $E[m(\theta)|x]$ которая и есть оценка правдоподобия с коэффициентом доверия Z.

Промежуточные расчеты:

$\overline{P}_{\iota} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}$	$\overline{P} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{P}_{\iota}$	$P^* = \frac{1}{Nn-1}\sum_{i=1}^{N}\overline{P}_{\iota}\left(1-\frac{\overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{\iota}}}{\overline{\boldsymbol{P}}}\right)$
$X_{ij} = \frac{Y_{ij}}{P_{ij}}$	$\overline{X}_{\iota} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{P_{ij}X_{ij}}{\overline{P}_{\iota}}$	$\overline{X} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\frac{P_{ij}X_{ij}}{\overline{P}}$

Построение оценочной функции:

Оцениваемая величина	Оценочная функция
$E[m(\theta)]$	$=\overline{X}$
$E[s^2(\theta)]$	$= \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\dfrac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}_{\iota}\right)^2\right\}$
$Var[m(\theta)]$	$= \dfrac{1}{P^*}\left(\dfrac{1}{Nn-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}\,(\overline{X}_{\iota}-\overline{X})^2 - \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\dfrac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}\left(X_{ij}-\overline{X}_{\iota}\right)^2\right\}\right)$

Коэффициент доверия

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} P_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} P_{ij} + \dfrac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]}}$$

Эмпирическая байесовская оценка объема совокупных требований:

$$E[m(\theta)|x] = Z\overline{X} - (1-Z)E[m(\theta)]$$

□

13. NCD-системы

Стационарное распределение:

$$\begin{cases} \pi = \pi \, P \\ \sum \pi_i = 1 \end{cases}$$

14. Треугольники развития убытков

■■■