2.18. МОНОТОННЫЕ СТРАХОВЫЕ РЕНТЫ

До сих пор ренты, связанные с выплатами страховых сумм или премий, были постоянными, т.е. не изменялись во времени. В этом параграфе мы рассмотрим переменные, например, возрастающие или убывающие ренты.

Начнем с пожизненной возрастающей ренты. Это означает, что в первый год выплачивается единичная сумма — 1, во второй год — 2, и т.д. Пусть сначала рента является авансированной (пренумерандо). Диаграмма ее выплат изображена на рис. 18.1. Текущая стоимость этой ренты обозначается $(I\ddot{a})_x$.

Возрастающая рента

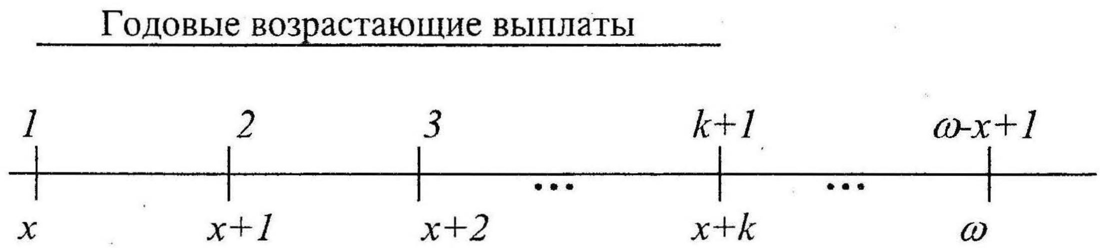

Рис. 18.1

Применяя дисконтирование с помощью жизненного дисконтного множителя

$$ {}_kE_x = \frac{D_{x+k}}{D_x} \ , $$

получим, что

$$ (I\ddot{a})_x = \frac{D_x}{D_x} + 2\cdot\frac{D_{x+1}}{D_x} + 3\cdot\frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots = \frac{D_x + 2\cdot D_{x+1} + 3\cdot D_{x+2} + \ldots}{D_x} \ . $$

Но

$$ D_x + 2\cdot D_{x+1} + 3\cdot D_{x+2} + \ldots = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + $$

$$ + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+2} + \ldots + \ldots $$

или

$$ D_x + 2\cdot D_{x+1} + 3\cdot D_{x+2} + \ldots = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots $$

Итак,

$$(I\ddot{a})_x = \frac{N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots}{D_x} \quad . \tag{18.1}$$

Сумма коммутационных чисел есть также коммутационное число, обозначаемое S_x и

$$S_x = N_x + N_{x+1} + \ldots + N_{\omega - x} \; .$$

Таким образом,

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x} \quad . \tag{18.2}$$

Рассмотрим теперь случай срочной возрастающей ренты. Схема ее платежей изображена на рис. 18.2.

Рис. 18.2

Ясно, что текущая стоимость такой ренты есть

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{D_x + 2 \cdot D_{x+1} + \ldots + n \cdot D_{x+n-1}}{D_x} \quad . \tag{18.3}$$

Несложные преобразования показывают, что

$$D_x + 2 \cdot D_{x+1} + 3 \cdot D_{x+2} + \ldots + n \cdot D_{x+n-1} =$$

$$= N_x - N_{x+n} + N_{x+1} - N_{x+n} + \ldots + N_{x+n-1} - N_{x+n} =$$

$$= S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n} \; .$$

Таким образом,

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x} \quad . \tag{18.4}$$

Обыкновенная возрастающая рента (постнумерандо) отличается от авансированной отсрочкой на один год, таким образом

$$(Ia)_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot (I\ddot{a})_{x+1} \tag{18.5}$$

или

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x} \; . \tag{18.6}$$

Соответственно для срочной возрастающей ренты постнумерандо имеем

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot (I\ddot{a})_{x+1:\overline{n}|}$$

или

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}}{D_x} \; . \tag{18.7}$$

Перейдем теперь к убывающим рентам. Естественно, что можно говорить лишь о срочных убывающих рентах. Схема такой авансированной ренты изображена на рис. 18.3.

Убывающая рента

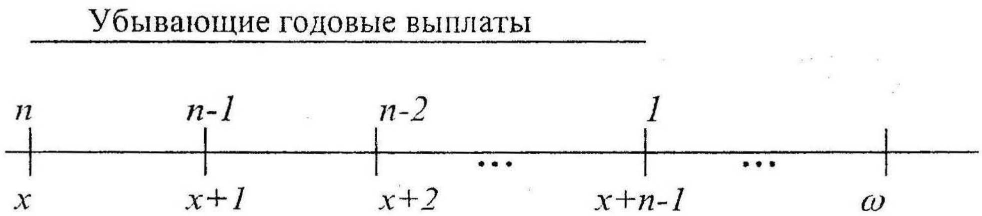

Рис. 18.3.

Текущее значение стоимости убывающей ренты равно

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x} \cdot \left[n \cdot D_x + (n-1) \cdot D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1} \right]$$

или после несложных преобразований

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{n \cdot N_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}}{D_x} \; . \tag{18.8}$$

Для убывающей ренты постнумерандо из соотношения

$$(Da)_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot (D\ddot{a})_{x+1:\overline{n}|}$$

получим

$$(Da)_{x:\overline{n}|} = \frac{n \cdot N_{x+1} - S_{x+2} + S_{x+n+2}}{D_x} \; . \tag{18.9}$$