
2.16. СВЯЗЬ МЕЖДУ АКТУАРНЫМИ ОЦЕНКАМИ СТРАХОВЫХ РЕНТ И СТРАХОВЫХ ПОЛИСОВ

Выше мы получили значения текущих стоимостей для страховых рент:
пожизненной

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{1}{D_x} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k} \right],$$

срочной

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} D_{x+k} \right],$$

а также для текущих стоимостей одноразовых премий: *пожизненного страхования жизни*

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} = \frac{1}{D_x} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k} \right],$$

срочного

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k},$$

и на дожитие

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Наконец для ежегодных премий по этим контрактам были получены выражения

$$P_x = \frac{M_x}{N_x},$$

$$P_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}},$$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

Покажем, что между этими величинами существует связь. Начнем с преобразования выражения для

$$C_x = v^{x+1} \cdot d_x.$$

Поскольку

$$d_x = l_x - l_{x+1},$$

то

$$\begin{aligned} C_x &= v^{x+1} \cdot (l_x - l_{x+1}) = v \cdot D_x - D_{x+1} = \\ &= (1-d) \cdot D_x - D_{x+1} = D_x - D_{x+1} - d \cdot D_x. \end{aligned}$$

Здесь

$$d = 1 - v = \frac{i}{1+i}$$

— дисконтная ставка, соответствующая годовой процентной ставке. Последовательно выписывая полученные выражения для C_x , получим

$$\begin{aligned} C_x &= D_x - D_{x+1} - d \cdot D_x, \\ C_{x+1} &= D_{x+1} - D_{x+2} - d \cdot D_{x+1}, \\ C_{x+2} &= D_{x+2} - D_{x+3} - d \cdot D_{x+2}, \\ &\vdots \\ C_{x+k} &= D_{x+k} - D_{x+k+1} - d \cdot D_{x+k}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получим

$$C_x + C_{x+1} + \dots + = D_x - d \cdot (D_x + D_{x+1} + \dots)$$

или

$$M_x = D_x - d \cdot N_x, \quad (16.1)$$

откуда делением обеих частей на D_x получим

$$A_x = 1 - d \cdot \ddot{a}_x. \quad (16.2)$$

Разделив (16.1) на N_x , получим

$$P_x = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d. \quad (16.3)$$

Если суммировать выражение для C_x не до предельного возраста, а до $x+n-1$, получим равенство

$$M_x - M_{x+n} = D_x - D_{x+n} - d \cdot (N_x - N_{x+n}). \quad (16.4)$$

Из (16.4) следуют соотношения для срочных контрактов:

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = 1 - A_{x:\overline{n}|} - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \quad (16.5)$$

$$A_{x:\overline{n}|} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \quad (16.6)$$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d. \quad (16.7)$$

Используя полученные соотношения, можно получить новые выражения для резервов. Так, для резервов по страхованию жизни имеем

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} = 1 - (P_x + d) \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

и т.к.

$$P_x + d = \frac{1}{\ddot{a}_x},$$

то получаем равенство

$${}_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}. \quad (16.8)$$

Подставляя вместо \ddot{a}_x равносильное выражение

$$\frac{1 - A_x}{d},$$

получим

$${}_tV_x = 1 - \frac{1 - A_{x+t}}{1 - A_x} = \frac{A_{x+t} - A_x}{1 - A_x}.$$

Наконец

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} = A_{x+t} \cdot \left(1 - \frac{P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}}{A_{x+t}} \right) = \\ &= A_{x+t} \cdot \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+t}} \right) = (P_{x+t} - P_x) \cdot \ddot{a}_{x+t} = \frac{P_{x+t} - P_x}{P_{x+t} + d}. \end{aligned}$$

Итак, мы получили два выражения для резервов через полные и годовые премии. т.е.

$${}_tV_x = \frac{A_{x+t} - A_x}{1 - A_x} \quad (16.9)$$

и

$${}_tV_x = \frac{P_{x+t} - P_x}{P_{x+t} + d} \quad (16.10)$$

Аналогичные формулы можно получить и для других контрактов.