2.2. ПОЖИЗНЕННАЯ РЕНТА

Во многих случаях люди предпочитают получать не отдельную сумму, а регулярный доход. В случае, когда такие регулярные выплаты осуществляются в течение всей жизни застрахованного, говорят о пожизненной ренте. Периодичность выплат ренты может быть произвольной: годовой, ежемесячной, ежеквартальной и т.д. Для простоты мы будем иметь в виду годовой период.

Более точно мы будем говорить об обыкновенной пожизненной ренте. Если рента покупается лицом в возрасте x в момент заключения контракта, то она выплачивается в конце каждого года дожития, т.е. в моменты:

$$x+1, x+2, x+3, \dots ,$$

т.е. рента выплачивается в конце $x+k$ года, если страхуемый достиг возраста $x+k$, в противном случае, т.е. в случае смерти, выплата ренты прекращается.

Нашей целью, как и в случае страхования на дожитие, будет нахождение актуарной стоимости пожизненной ренты, т.е. величины единовременной чистой премии, которую должен заплатить страхователь для того, чтобы страховая компания могла обеспечить выплату пожизненной ренты. Величину ежегодной выплаты будем считать единичной (например в \$1).

Пусть l_x лиц в возрасте x заключат контракт на пожизненную ренту годовыми выплатами в \$1. Актуарную стоимость такой ренты обозначим через a_x . Тогда в момент заключения контрактов суммарные поступления страховой компании составят

$$l_x \cdot a_x .$$

Эта сумма должна обеспечить пожизненные ежегодные выплаты для всех участников. Спустя год после заключения контракта оставшиеся в живых l_{x+1} участников получат общую сумму

$$l_{x+1} = 1 \cdot l_{x+1} ,$$

текущая стоимость которой составит

$$v \cdot l_{x+1} .$$

Спустя два года l_{x+2} оставшихся в живых участников получат общую сумму

$$l_{x+2} = 1 \cdot l_{x+2} ,$$

текущая стоимость которой будет равна

$$v^2 \cdot l_{x+2} .$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что текущая стоимость всех выплат будет равна

$$v \cdot l_{x+1} + v^2 \cdot l_{x+2} + \ldots + v^k \cdot l_{x+k} + \ldots + v^{\omega - x} \cdot l_\omega ,$$

где ω — предельный возраст в таблице смертности.

Баланс между поступлениями и выплатами будет выполнен при условии, что

$$l_x \cdot a_x = v \cdot l_{x+1} + \ldots + v^k \cdot l_{x+k} + \ldots + v^{\omega - x} \cdot l_\omega \qquad (2.1)$$

или в сокращенной форме

$$l_x \cdot a_x = \sum_{k=1}^{\omega - x} v^k \cdot l_{x+k} . \qquad (2.2)$$

Из этого равенства получим выражение для a_x:

$$a_x = v \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2 \cdot \frac{l_{x+2}}{l_x} + \ldots + v^{\omega - x} \cdot \frac{l_\omega}{l_x} \qquad (2.3)$$

Учтя, что

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_n p_x ,$$

получим

$$a_x = v \cdot {}_1 p_x + v^2 \cdot {}_2 p_x + \ldots + v^{\omega - x} \cdot {}_{\omega - x} p_x \qquad (2.4)$$

Умножая числитель и знаменатель каждого слагаемого в правой части формулы (2.3) на v^x, получим

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{D_\omega}{D_x} ,$$

или

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega}{D_x} . \qquad (2.5)$$

Поскольку согласно определению коммутационных функций

$$D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega = N_{x+1} ,$$

то получим сокращенное выражение для a_x:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \tag{2.6}$$

Временная диаграмма для обыкновенной пожизненной ренты приведена на рис. 2.1.

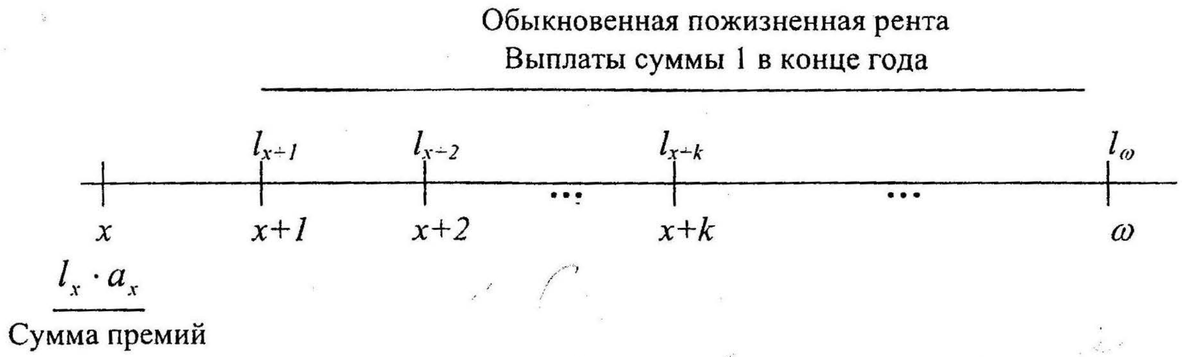

Рис. 2.1.