ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ
И СООТНОШЕНИЯ

Оглавление

□ □ □

1. Ставки процентов и их взаимосвязи

1.1. Наращение и дисконтирование

i – ставка процента

v – коэффициент дисконтирования

$$v = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

d – ставка дисконта

$$d = iv = 1 - v$$

δ – сила роста ставка процента

$$\delta = \ln(1+i) = -\ln(1-d)$$

□

Потоки:

$s_{n\urcorner}$ – будущая стоимость потока накоплений, постнумерандо

$$s_{n\urcorner} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$\ddot{s}_{n\urcorner}$ – современная стоимость потока платежей, пренумерандо

$$\ddot{s}_{n\urcorner} = (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

$a_{n\urcorner}$ – современная стоимость потока платежей, постнумерандо

$$a_{n\urcorner} = v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{v(1-v^n)}{1-v} = \frac{1-v^n}{i}$$

$\ddot{a}_{n\urcorner}$ – современная стоимость потока платежей, пренумерандо

$$\ddot{a}_{n\urcorner} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{d}$$

□

Сводная таблица взаимосвязей ставок

	i	v	d	δ
i	$= i$	$= \dfrac{1-v}{v}$	$= \dfrac{d}{1-d}$	$= e^{\delta} - 1$
v	$= \dfrac{1}{1+i}$	$= v$	$= 1 - d$	$= e^{-\delta}$
d	$= \dfrac{i}{1+i} = iv$	$= 1 - v$	$= d$	$= 1 - e^{-\delta}$
δ	$= ln(1+i)$	$= 1 - \ln v$	$= 1 - \ln(1-d)$	δ
$s_{\overline{n}\mid}$	$\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$	$= a_{\overline{n}\mid}\,(1+i)^n$		$= \dfrac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}$
$\ddot{s}_{\overline{n}\mid}$	$(1+i)\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$			
$a_{\overline{n}\mid}$	$\dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$	$= \dfrac{v(1-v^n)}{1-v} = s_{\overline{n}\mid}\, v^n$		
$\ddot{a}_{\overline{n}\mid}$		$= \dfrac{1-v^n}{1-v} = \dfrac{1-v^n}{d}$		

□

1.2. Номинальные ставки

Номинальная процентная ставка, соответствующая m начислениям за год:

$$i^{(m)} = m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right) = m\left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right)$$

m-кратная рента пренумерандо:

$$\ddot{a}_{\overline{n}\mid}^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1-v^n}{1-v^{1/m}}$$

Эффективная процентная ставка единичного промежутка $\frac{1}{m}$:

$$i_*^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

Обратно, зная номинальную ставку единичного промежутка $i_*^{(m)}$, находим эффективную годовую ставку i:

$$i = \left(1 + \frac{i_*^{(m)}}{m}\right)^m - 1$$

Связка:

$$i^{(m)} = m\, i_*^{(m)}$$

Номинальная ставка дисконта *(nominal rate of discount* или учетная ставка*)*, начисляемая с частотой m

$$d^{(m)} = m\left(1 - (1-d)^{\frac{1}{m}}\right)$$

Эффективная ставка дисконта единичного промежутка $\frac{1}{m}$:

$$d_*^{(m)} = 1 - (1-d)^{\frac{1}{m}}$$

Связка:

$$d^{(m)} = m\, d_*^{(m)}$$

Самые важные соотношения:

$$a_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{n\rceil} = \frac{i}{i^{(m)}} \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1-v^n}{1-v^{1/m}} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1-v^n}{i^{(m)}}$$

□

1.3. Наращение суммы и возрастание суммы в k раз

Наращение начальной суммы C за время t при постоянной силе роста процентов $\delta = const$:

$$C(t) = C(1+i)^t = Ce^{\delta t}$$

Приведенная сумма непрерывного денежного потока:

$$C(t) = C_0\, e^{-\delta t}$$

Наращение начальной суммы C за время t при переменной силе роста процентов $\delta = \delta(t)$:

$$C(t) = C\,exp\left(\int_0^t \delta(t)dt\right)$$

Наращение суммы по ставке дисконта:

$$C(t) = C(1-d)^{-t}$$

или

$$C(t) = C\left(1-\frac{d}{m}\right)^{-m\cdot n}$$

Возрастание суммы в k раз:

$$A(t_1, t_2) = exp\left(\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt\right)$$

□

1.4. Инфляция и формула Фишера

Номинальная ставка процента, учитывающая инфляцию (формула Фишера):

$$r = r_{real} + \alpha + r_{real}\alpha$$

Обратно – определение реальной ставки по заданной номинальной и по известному темпу инфляции:

$$r_{real} = \frac{r-\alpha}{1+\alpha}$$

□

2. Функции сложных процентов

2.1. Простые ренты

Современная стоимость обыкновенной (запаздывающей) финансовой ренты постнумерандо:

$$a_{n\rceil} = v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{v(1-v^n)}{1-v} = \frac{1-v^n}{i}$$

Современная стоимость упреждающей (опережающей) финансовой ренты пренумерандо:

$$\ddot{a}_{n\rceil} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}$$

Связь ренты пренумерандо и постнумерандо:

$$\ddot{a}_{n\rceil} = 1 + a_{n-1\rceil}$$

Вечная рента постнумерандо:

$$a = v + v^2 + \cdots + v^n + \cdots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}$$

Вечная рента пренумерандо:

$$\ddot{a} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

Отсроченная рента постнумерандо:

$${}_{m|}a_{n\rceil} = v^{m+1} + \cdots + v^{m+n} = v^m(v + \cdots + v^n) = v^m a_{n\rceil}$$

Отсроченная рента пренумерандо:

$${}_{m|}\ddot{a}_{n\rceil} = v^m + \cdots + v^{m+n-1} = v^m \ddot{a}_{n\rceil}$$

□

2.2. Возрастающие и убывающие ренты

Возрастающая рента постнумерандо:

$$(Ia)_{\bar{n}|} = v + 2v^2 + \cdots + nv^n = v\frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2} = \frac{a_{\bar{n}|}}{d} - \frac{nv^n}{i}$$

Возрастающая рента пренумерандо:

$$(I\ddot{a})_{\bar{n}|} = 1 + 2v + 3v^2 + \cdots + nv^{n-1} = \frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2} = \frac{\ddot{a}_{\bar{n}|} - nv^n}{d}$$

Современная стоимость отсроченной упреждающей возрастающей ренты постнумерандо:

$${}_{m|}(Ia)_{\bar{n}} = v^m (Ia)_{\bar{n}}$$

Современная стоимость отсроченной упреждающей возрастающей ренты пренумерандо:

$${}_{m|}(I\ddot{a})_{\bar{n}} = v^m (I\ddot{a})_{\bar{n}}$$

Будущая стоимость возрастающего обыкновенного (запаздывающего) потока накопительных взносов:

$$(Is)_{\bar{n}|} = (1+i)^n\,(Ia)_{\bar{n}} = \frac{S_{\bar{n}|}}{1-v} - \frac{n}{i} = \frac{S_{\bar{n}|}}{d} - \frac{n}{i}$$

Будущая стоимость возрастающего упреждающего потока накопительных взносов:

$$(I\ddot{s})_{\bar{n}|} = (1+i)^n\,(I\ddot{a})_{\bar{n}} == \frac{\ddot{S}_{\bar{n}|} - n}{1-v} = \frac{\ddot{S}_{\bar{n}|} - n}{d}$$

Запаздывающая (постнумерандо) убывающая рента:

$$(Da)_{\bar{n}|} = nv + (n-1)v^2 + \cdots + v^n = \frac{(ni-1)a_{\bar{n}|} + nv^n}{i}$$

Упреждающая (пренумерандо) убывающая рента:

$$(D\ddot{a})_{\bar{n}|} = n + (n-1)v + (n-2)v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{(ni-1)\ddot{a}_{\bar{n}|} + nv^{n-1}}{i}$$

Будущая стоимость запаздывающего (постнумерандо) убывающего потока накопительных взносов:

$$(Ds)_{\bar{n}|} = (1+i)^n (Da)_{\bar{n}|} == \frac{(ni-1)s_{\bar{n}|} + n}{i} = \frac{(ni-1)(1+i)^n + 1}{i^2}$$

Будущая стоимость упреждающего (пренумерандо) убывающего потока накопительных взносов:

$$(D\ddot{s})_{\bar{n}|} = (1+i)^n (D\ddot{a})_{\bar{n}|} = \frac{(ni-1)\ddot{s}_{\bar{n}|} + n(1+i)}{i} = (1+i)(Ds)_{\bar{n}|}$$

□

2.3. Ренты, начисляемые *p*-раз в год

	Постнумерандо	Пренумерандо
Современная стоимость *p*-срочной ренты	$a_{n\rceil}^{(p)} = s_{n\rceil}^{(p)} v^n = \frac{i}{i^{(p)}} a_{n\rceil}$	$\ddot{a}_{n\rceil}^{(p)} = \ddot{s}_{n\rceil}^{(p)} v^n = a_{n\rceil}^{(p)} + \frac{1-v^n}{p}$
Наращенная сумма *p*-срочной ренты	$s_{n\rceil}^{(p)} = a_{n\rceil}^{(p)} (1+i)^n$	$\ddot{s}_{n\rceil}^{(p)} = \ddot{a}_{n\rceil}^{(p)} (1+i)^n$
Современная стоимость отложенной *p*-срочной ренты	${}_{m\|}a_{n\rceil}^{(p)} = v^m\, a_{n\rceil}^{(p)}$	${}_{m\|}\ddot{a}_{n\rceil}^{(p)} = v^m\, \ddot{a}_{n\rceil}^{(p)}$
Наращенная сумма отложенной *p*-срочной ренты	${}_{m\|}s_{n\rceil}^{(p)} = {}_{m\|}a_{n\rceil}^{(p)} (1+i)^n$	$\ddot{s}_{n\rceil}^{(p)} = {}_{m\|}\ddot{a}_{n\rceil}^{(p)} (1+i)^n$

Современная стоимость вечной *p*-срочной ренты:

$$a^{(p)} = \frac{R}{i^{(p)}}$$

Постоянная непрерывная рента:

$$\lim_{p\to\infty} i^{(p)} = \lim_{p\to\infty} p\left(exp\frac{\delta}{p} - 1\right) = \delta$$

$$\lim_{p\to\infty} d^{(p)} = \lim_{p\to\infty} p\left(1 - exp\frac{\delta}{p}\right) = \delta$$

При малых *p*- можно использовать соотношения:

$$i^{(p)} \approx \delta + \frac{\delta^2}{2p}$$

$$d^{(p)} \approx \delta - \frac{\delta^2}{2p}$$

Современная стоимость постоянной непрерывной ренты:

$$\lim_{p\to\infty} a_{n\urcorner}^{(p)} = \frac{d}{\delta} a_{n\urcorner} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

$$\lim_{p\to\infty} \ddot{a}_{n\urcorner}^{(p)} = \frac{d}{\delta} \ddot{a}_{n\urcorner} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

Наращенная сумма постоянной непрерывной ренты:

$$\lim_{p\to\infty} s_{n\urcorner}^{(p)} = \frac{i}{\delta} s_{n\urcorner} = \frac{(1+i)^n - 1}{\delta}$$

$$\lim_{p\to\infty} \ddot{s}_{n\urcorner}^{(p)} = \frac{i}{\delta} \ddot{s}_{n\urcorner} = \frac{i}{d} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{\delta}$$

□

3. Схемы займов и консолидации долгов

3.1. Сумма единичного платежа по кредиту:

$$R = \frac{PV}{a_{n\rceil}}$$

3.2. Неоплаченная сумма долга, перспективный метод:

Неоплаченная сумма долга (остаток задолженности) после k-го платежа, перспективный метод:

$$P = R\, a_{\overline{n-k}|i}$$

3.3. Неоплаченная сумма долга, ретроспективный метод:

Неоплаченная сумма долга (остаток задолженности) после k-го платежа, ретроспективный метод:

$$P = A(1+i)^k - R\, s_{k\rceil\, i}$$

$$P = A - (R - Ai)\, s_{k\rceil\, i}$$

3.4. Консолидация платежей:

Простые проценты

$$S_0 = \sum S_i(1 + t_i\, r) + \sum S_k(1 + t_k\, r)^{-1}$$

Сложные проценты:

$$S_0 = \sum S_i(1 + t_i r)^{t_i} + \sum S_k(1 + t_k r)^{t_k}$$

□

4. Облигация

Цена облигации в общем случае:

$$P = \frac{C}{(1+s_1)^1} + \frac{C}{(1+s_2)^2} + \cdots + \frac{C+F}{(1+s_m)^m}$$

$$P = \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(1+s_k)^k} = \sum_{k=1}^{m} d_k C_k$$

$$P = \sum_{t=1}^{m} C_t (1+y)^{-t} = \sum_{t=1}^{m} C_t v^t$$

4.1. Дюрация Маколея

Дюрация Маколея – взвешенный срок всех платежей облигации:

$$D_M = \sum t w_t = \sum \frac{t\, C_t}{P(1+r)^{t+1}}$$

$$D_M = \frac{1}{P}\left(\frac{1 \cdot C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{(M-1)\, C}{(1+y)^{M-1}} + \frac{M\,(C+F)}{(1+y)^M}\right)$$

$$D_M = \frac{1+y}{y} - \frac{M(c-y)+1+y}{c((1+y)^M-1)+y}$$

Модифицированная дюрация – скорректированная дюрация Маколея:

$$MD = \frac{D_M}{1+y}$$

Оценивание чувствительности цены облигации к изменению процентных ставок:

$$\frac{\Delta P}{P} = -MD\, \Delta y$$

4.2. Дюрация Фишера-Вейля:

$$D_{FW} = \frac{1}{P}\left(\frac{1 \cdot C}{(1+s_1)^1} + \frac{2\, C}{(1+s_2)^2} + \cdots + \frac{(M-1)\, C}{(1+s_{M-1})^{M-1}} + \frac{M\,(C+F)}{(1+s_t)^M}\right)$$

4.3. Выпуклость облигации:

$$Conv = \frac{P - P_0}{P_0} + DM \cdot \Delta y$$

4.4. Скачок дюрации:

$$D_{gap} = MD_A - \frac{L}{A} \cdot MD_L$$