

Глава 14

Треугольники развития

Цели главы

К концу данной главы вы будете уметь:

- понимать искомый процесс в страховании общего вида
- описывать концепцию треугольников задержки (или развития)
- описывать и применять основной цепочно-лестничный метод
- описывать и применять метод интервалов

§1 Введение

В следующих двух главах мы рассмотрим некоторые аспекты страхования *общего вида*.

Треугольники развития — важная тема в практической работе актуариев, работающих в общем страховании, которым приходится использовать крупноформатные таблицы и другие комплекты вычислительного оборудования, чтобы спрогнозировать будущие количества и величины исков. В этом разделе мы рассмотрим три стандартных метода проектирования треугольников развития — основной цепочно-лестничный метод, метод урегулирования инфляции и метод интервалов.

Методы, которые будут изучены в этой главе, непосредственно обоснованы в теме G, которая содержит в себе практическое применение данных методов и представляет некоторые другие методы.

Если в этой главе используются термины, непонятные для вас, можете обратиться к словарю.

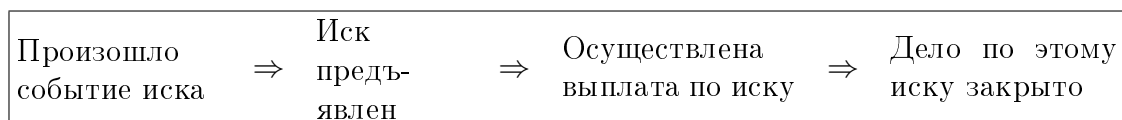
Основная лекция этой главы знакомит нас с идеей треугольников развития и затем объясняет, как можно вычислить резервы, используя каждый из трех представленных методов. Также для каждого метода здесь даны численные примеры.

§2 Процесс расчета исков

2.1 Типы резервов

Специалисты, занимающиеся общим страхованием, должны уметь оценивать *окончательные* стоимости исков по нескольким причинам. Во-первых, им необходимо знать полную стоимость оплачиваемых исков, чтобы определить будущие ставки премий. Также им нужно обеспечить резервы в счетах страховой компании, чтобы быть уверенными в том, что у них будет достаточно средств для покрытия задолженностей.

Обычные шаги, включаемые в расчет иска общего страхования, показаны на схеме:



После того, как произошло событие иска (например, держатель полиса был вовлечен в дорожно-транспортное происшествие или был ограблен), держатель полиса докладывает о несчастном случае страховщику (предъявляет иск).

Дальнейшая процедура состоит в том, что страховщик производит необходимые выплаты (например, выплаты по ремонту автомобиля, компенсация травмированному человеку или возмещение стоимости украденных вещей). По одному иску может быть сделано несколько выплат.

Когда страховщик определяет, что для данного иска не могут потребоваться дополнительные выплаты, дело по этому иску закрывается.

Специалистам общего страхования необходимо планировать резервы, чтобы выполнить их обязательства для будущих выплат по несчастным случаям, которые уже произошли. Эти резервы имеют отношение к искам на различных стадиях процесса расчета. В частности, резервы требуются для *заявленных, но не урегулированных исков* и *ИБНР* исков:

Типы резервов

ИБНР (произносится "И.Б.Н.Р.") резервы исков требуются для убытков,

которые понесены, но не зарегистрированы, то есть событие иска произошло, но иск еще не был предъявлен страховщику.

Резервы заявленных, но не урегулированных (ЗНУ) исков требуются, когда дело касается исков, которые были предъявлены, но еще не закрыты.

Вопрос для самоподготовки 14.1. Определите, где на последнем графике размещен каждый из этих резервов.

2.2 Таблицы треугольников развития

Информация по прошлым искам может быть подытожена в *треугольнике развития* (или *задержки*), показывающем выплаты, произведенные в различные годы:

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	500	200	100
	1990	500	700	300	?
	1991	400	600	?	?
	1992	500	?	?	?

Каждая строка в треугольнике представляет *исходный* год, который определяет *группу* исков. Этот пример использует группировку по *годам несчастных случаев* (годам событий)¹. Строка 1989 года содержит иски, относящиеся к несчастным случаям, произошедшим в этом году.

Столбцы представляют годы *развития*, которые показывают, как группа исков, относящаяся к определенному исходному году "развивалась" в дальнейшем. Столбец 0 отображает год, в который произошел несчастный случай. Столбец 1 — год после несчастного случая и т.д.

Каждую запись в таблице можно определить по ее *исходному году* (строка) и *году развития* (столбец). Например, £200000 относится к 1989 исходному году и ко второму году развития; далее мы будем записывать это как 1989/2 или $C_{1989,2}$.

Вопрос для самоподготовки 14.2. Используя треугольник задержки, описанный выше, определить

¹Из-за того, что большинство статистических теорий в страховании общего вида разработаны в соответствии со страхованием автомобилей, термин "год несчастных случаев" расширяется здесь включением в него ситуаций, где событие иска не является несчастным случаем; например, угон машин, поджог, ограбление

(а) общую величину исков, выплаченных в 1992 году по несчастным случаям, случившимся в 1990 и

(б) общую величину исков, выплаченных за 1992 год.

Заметим, что определенные календарные года представлены на диагоналях треугольника. Например, диагональ (500-600-300-100) показывает все выплаты, произведенные в течение последнего из рассматриваемых лет, то есть 1992. Заметим также, что верхний левый угол представляет "известные" прошлые выплаты, а нижний правый угол (со знаками "?") — "неизвестные" будущие выплаты. Наша задача на протяжении оставшейся части главы — рассмотреть методы оценки этих неизвестных значений, чтобы заполнить правый нижний угол треугольника. Большинство этих ячеек будут содержать задолженности или резервы для неоплаченных исков.

Таблица в примере, описанном ранее, показывала величины оплаченных исков, сгруппированных по годам несчастных случаев. Также могут использоваться разнообразные альтернативные таблицы. Например:

1. Группы могли бы определяться *годом предъявления* ("все иски, предъявленные в год X") или *годом оформления* ("все иски, поданные по полисам, оформленным в год X").
2. Исходные годы могут совпадать с *финансовыми* годами компании (то есть могут считаться с 1-ого апреля по 31-ое марта, например) или могут быть *исходными кварталами* или *месяцами*.
3. Записи в таблице могут показывать *количество* исков или оценивать *окончательную* стоимость или *расходы* на получение страхового возмещения.

Вопрос для самоподготовки 14.3. Если мы спроецируем иски, заданные в треугольнике развития, чтобы заполнить пустые ячейки таблицы, то какие резервы, из описанных в предыдущем разделе, могут быть туда включены, если таблица показывает

(а) величины исковых выплат, сгруппированные по году событий и

(б) величины исковых выплат, сгруппированные по году предъявления?

2.3 Коэффициенты развития

Определить коэффициент развития и показать, как множество предполагаемых коэффициентов развития может использоваться для проектирования будущего развития треугольника задержки. (n1)

Шаблон развития иска может быть изучен путем вычисления *коэффициентов развития*:

Коэффициенты развития

Коэффициент развития для исходного года i и года развития j равен:

$$\text{коэффициент развития} = \frac{\sum_{t=0}^j C_{i,t}}{\sum_{t=0}^{j-1} C_{i,t}}$$

”Разделить сумму с нарастающим к моменту t итогом на сумму с итогом, нарастающим к моменту $t - 1$ ”

Пример 14.1 Вычислить коэффициент развития для 1990/2 для треугольника из примера.

Решение Коэффициент развития для 1990/2 равен:

$$\frac{C_{1990,0} + C_{1990,1} + C_{1990,2}}{C_{1990,0} + C_{1990,1}} = \frac{500 + 700 + 300}{500 + 700} = \frac{1500}{1200} = 1.25$$

Вопрос для самоподготовки 14.4. Дополните треугольник развития из примера, предполагая, что коэффициенты развития, показанные в следующей таблице, будут применяться в будущие годы развития.

коэффициенты развития		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989				
	1990				1.100
	1991			1.250	1.150
	1992		2.500	1.300	1.100

2.4 Статистическая модель для треугольников развития

Записи в треугольнике развития могут быть смоделированы с использованием равенства:

$$C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j},$$

где

- $C_{i,j}$ запись в треугольнике с исходным годом i и годом развития j (например, выплата по иску)
- n_i обозначает "объем" исков, относящихся к исходному году i . Также может отражать число исков (*частоту*) и среднюю стоимость иска в настоящий период времени (*текущая стоимость*)
- r_j коэффициент года развития j , показывающий долю исковых выплат в этот год. Сумма коэффициентов r_j по всем годам развития должна равняться 1.
- λ_{i+j} коэффициент поправки, относящийся к календарным годам (например, коэффициент инфляции)
- $e_{i,j}$ случайная статистическая ошибка со средним значением ноль, которая показывает разницу между действительным и ожидаемым результатами.

В методах планирования, которые мы будем изучать в следующем разделе, мы будем основываться на *ожидаемых* величинах иска, то есть мы будем "опускать" элемент $e_{i,j}$.

Вопрос для самоподготовки 14.5. Актуарий, используя данную модель, оценил параметры для треугольника развития следующим образом:

$$\begin{aligned} n_{90} &= \mathcal{L}1.50m, & r_0 &= 0.6, & \lambda_{90} &= 1.00 \\ n_{91} &= \mathcal{L}1.75m, & r_1 &= 0.3, & \lambda_{91} &= 1.10 \\ n_{92} &= \mathcal{L}1.60m, & r_2 &= 0.1, & \lambda_{92} &= 1.20 \\ & & & & \lambda_{93} &= 1.25 \\ & & & & \lambda_{94} &= 1.30 \end{aligned}$$

Используя эти оценки, заполните таблицу и оцените величину неоплаченных исков.

Вопрос для самоподготовки 14.6. Объясните, что будет показывать каждый из параметров n_i, r_j, λ_{i+j} , если мы применим эту модель к треугольнику развития, показывающему количество исковых выплат, сгруппированным по году предъявления.

§3 Методы планирования исков

3.1 Основной цепочно-лестничный метод

Описать и применить основной цепочно-лестничный метод для заполнения треугольника задержки. (n2)

Обсудить предположения, лежащие в основе применения методов.

(n3)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ/ФОРМУЛА

Основной цепочно-лестничный метод предполагает модель: $C_{i,j} = n_i r_j + e_{i,j}$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

1. Коэффициенты развития r_j не отличаются по исходному году, то есть коэффициенты развития — r_j , а не $r_{i,j}$.
2. Иски, произошедшие в первый исходный год, предполагаются полностью рассмотренными, то есть в годах развития не будет исков за пределами правого края таблицы. Это означает, что коэффициенты развития (r_j -ые) для лет развития, включенных в таблицу, в сумме дают 1.
3. Влияния инфляции и дополнительные тенденции игнорируются. Коэффициент λ_{i+j} предполагается постоянным и, поэтому, не включается в данную модель.

ЛОГИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Следующий пример иллюстрирует интуитивное обоснование, лежащее в основе цепочно-лестничного метода.

Предположим, что вас попросили оценить, какая запись могла бы соответствовать ячейке 1991/2 в следующей таблице:

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	500	200	100
	1990	500	700	300	
	1991	400	600	?	
	1992	500			

Естественным подходом могло бы быть сравнение итогов предшествующих исходных лет для двух прямоугольников, отмеченных в этой таблице.

Мы видим, что общая величина исков, оплаченных к концу 1-ого года развития для всех исходных лет, предшествующих 1991 году, была $300 + 500 + 500 + 700 = 2000$, а общие исковые выплаты за 2-ой год развития для этих лет равнялись $200 + 300 = 500$, то есть четверти этого.

Общая величина исков, оплаченных к концу 1-ого года развития, для 1991 исходного года равна $400 + 600 = 1000$. Тогда можно ожидать, что значение ячейки 1991/2 — четверть этого, то есть 250.

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	500	200	100
	1990	500	700	300	
	1991	400	600	250?	
	1992	500			

Вот что мы сделали, чтобы это вычислить:

1. Предположили, что шаблон развития одинаковый для каждого исходного года.
2. Объединили всю значимую предшествующую информацию, чтобы найти наилучшую оценку для коэффициента развития.
3. Применили этот коэффициент к более позднему исходному году, чтобы оценить значение ячейки для более позднего года развития

Это точное описание логики, которую использует основной цепочно-лестничный метод.

Вопрос для самоподготовки 14.7. Какое значение мы можем ожидать в ячейке 1990/3?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЫВОД

Интуитивная иллюстрация, которую мы приводили выше, может быть доказана математически, если составить уравнение для *ожидаемых* значений, предположенных в этой модели, с известными значениями имеющихся данных и, затем, использовать ожидаемые параметрические значения, чтобы оценить неизвестные переменные.

Так как вектор ошибок, предположительно, имеет среднее значение 0, *ожидаемые* выплаты для каждого года таковы:

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	$n_{89}r_0$	$n_{89}r_1$	$n_{89}r_2$	$n_{89}r_3$
	1990	$n_{90}r_0$	$n_{90}r_1$	$n_{90}r_2$	$n_{90}r_3$
	1991	$n_{91}r_0$	$n_{91}r_1$	$n_{91}r_2$	$n_{91}r_3$
	1992	$n_{92}r_0$	$n_{92}r_1$	$n_{92}r_2$	$n_{92}r_3$

Сравнение записей в двух выделенных прямоугольниках дает два уравнения:

$$n_{89}r_0 + n_{89}r_1 + n_{90}r_0 + n_{90}r_1 = 300 + 500 + 500 + 700$$

$$n_{89}r_2 + n_{90}r_2 = 200 + 300,$$

которые можно разложить на множители и получить:

$$(n_{89} + n_{90})(r_0 + r_1) = 2000$$

$$(n_{89} + n_{90})r_2 = 500$$

Используя данные для 1991 исходного года, получаем:

$$n_{91}r_0 + n_{91}r_1 = 400 + 600 \quad \text{то есть } n_{91}(r_0 + r_1) = 1000$$

Можем оценить значение для 1991/2, записав его в виде:

$$n_{91}r_2 = n_{91}(r_0 + r_1) \times \frac{(n_{89} + n_{90})r_2}{(n_{89} + n_{90})(r_0 + r_1)}$$

Используя выведенные равенства, получаем: $1000 \times \frac{500}{2000} = 250$, что совпадает со значением, полученным путем интуитивных вычислений.

ИЗЛОЖЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Шаг 1 (накапливаем)

Составим таблицу исков с *нарастающим итогом* (совокупных исков), показывающую общие иски к концу каждого года рассмотрения. Это позволит избежать повторных сложений. Накопительная таблица выглядит так:

выплаты по искам с нарастающим итогом (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	800	1000	1100
	1990	500	1200	1500	?
	1991	400	1000	?	?
	1992	500	?	?	?

Шаг 2 (вычисляем коэффициенты)

Вычисляем коэффициент для каждого столбца делением суммы известных данных в этом столбце на сумму соответствующих записей из предыдущего столбца (то есть не включаем нижнюю ячейку). Это дает оценки для коэффициентов будущего развития:

$$\frac{800+1200+1000}{300+500+400} = \frac{3000}{1200} = 2.5$$

$$\frac{1000+1500}{800+1200} = \frac{2500}{2000} = 1.25$$

$$\frac{1100}{1000} = 1.1$$

Коэффициенты развития удобно записать над (или под) столбцами:

$$\times 2.5 \quad \times 1.25 \quad \times 1.1$$

выплаты по искам с нарастающим итогом (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	800	1000	1100
	1990	500	1200	1500	?
	1991	400	1000	?	?
	1992	500	?	?	?

Шаг 3 (заполнить ячейки накопительной таблицы)

Теперь заполним неизвестные (накопленные) данные, применяя коэффициенты, находящиеся над столбцами, к предыдущим столбцам. Вычисления будут такими:

$$\begin{array}{r}
 1500 \times 1.1 = 1650 \\
 1000 \times 1.25 = 1250, \quad 1250 \times 1.1 = 1375 \\
 500 \times 2.5 = 1250, \quad 1250 \times 1.25 = 1563, \quad 1563 \times 1.1 = 1719
 \end{array}$$

и таблица преобразуется так:

выплаты по искам с нарастающим итогом (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	800	1000	1100
	1990	500	1200	1500	1650
	1991	400	1000	1250	1375
	1992	500	1250	1563	1719

Шаг 4 (обратное преобразование таблицы)

Осуществим вычитания, чтобы найти оценки для отдельных лет; например, $1250 - 500 = 750$:

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	500	200	100
	1990	500	700	300	150
	1991	400	600	250	125
	1992	500	750	313	156

Шаг 5 (вычисление общей прогнозируемой суммы)

Сложим оценочные данные, чтобы найти величину непоплаченных исков:

$$150 + 250 + 125 + 750 + 313 + 156 = 1744$$

ЗАМЕЧАНИЯ

Основной цепочно-лестничный метод игнорирует инфляцию. Это означает, что в случае инфляции, основной цепочно-лестничный метод

будет прогнозировать ее заблаговременно, используя присущий инфляции коэффициент, который является взвешенным средним значением прошлых коэффициентов. Если такое значение не подходит для будущих прогнозов, это может привести к искажениям.

Вопрос для самоподготовки 14.8. Таблица, приведенная ниже, показывает число исков по страхованию частных строений, поданных в каждый год развития. Используя основной цепочно-лестничный метод, оцените общее окончательное число исков, произошедшее с 1-ого января 1989 года по 31-ое декабря 1992 года.

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	17500	5000	2250	750
	1990	21000	6200	2750	
	1991	18800	5500		
	1992	21300			

3.2 Основной цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию

Показать, как основной цепочно-лестничный метод может быть скорректирован, чтобы точно учитывать инфляцию. (п3)

Основной цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию — это модификация основного цепочно-лестничного метода, которая подробно учитывает инфляцию, чтобы снизить искажения, вызванные колебаниями уровня инфляции.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ/ФОРМУЛА

Основной цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию предполагает модель: $C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j}$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Предположения такие же, как для основного цепочно-лестничного метода, за исключением того, что модель включает коэффициент λ_{i+j} , который является предполагаемым индексом инфляции исков.

ЛОГИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Цель основного цепочно-лестничного метода с поправкой на инфляцию — устранить искажающие воздействия инфляции, используя предполагаемый (допустимый) индекс инфляции прошлых исков, чтобы привести все известные данные к значениям, находящимся в приблизительно постоянном денежном выражении. Затем к этим скорректированным данным применяется основной цепочно-лестничный метод, чтобы получить прогнозируемые данные, также находящиеся в приблизительно постоянном денежном выражении. Далее преобразуем прогнозируемые данные в действующие денежные величины с помощью предполагаемого индекса инфляции будущих исков.

ТРЕБОВАНИЯ К ДАННЫМ

Основной цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию требует тех же данных, что и основной цепочно-лестничный метод, плюс индекс инфляции прошлых и ожидаемых будущих исков.

ИЗЛОЖЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для применения основного цепочно-лестничного метода с поправкой на инфляцию необходимы следующие шаги:

1. Перемножить величины в исходном треугольнике с индексами инфляции соответствующих календарных лет.
2. Применить основной цепочно-лестничный метод для этих данных также, как было описано выше (используя шаги 1-4), чтобы получить прогнозируемые величины, выраженные в постоянных денежных элементах.
3. Умножить эти величины на индексы инфляции соответствующих календарных лет, чтобы получить действительные прогнозируемые величины.
4. Вычислить сумму этих прогнозируемых данных, чтобы найти общую величину ожидаемых будущих исков.

ПРИМЕР

В качестве иллюстрации повторим предыдущий пример, используя следующие коэффициенты инфляции исковых стоимостей для каждого

из последующих календарных лет:

годовой коэффициент инфляции исков (прошлых)	
1989/90	11%
1990/91	10%
1991/92	9%

годовой коэффициент инфляции исков (будущих)	
1992/93	8%
1993/94	7%
1994/95	6%

Мы можем преобразовать исходную таблицу к данным 1992 года. Например, запись 300 изменится так:

$$300 \times 1.11 \times 1.10 \times 1.09 = 399$$

Получаем:

выплаты по искам в денежном выражении 1992 года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	399	600	218	100
	1990	600	763	300	
	1991	436	600		
	1992	500			

Далее складываем эти данные и записываем над столбцами коэффициенты, вычисленные обычным способом. Затем используем эти коэффициенты, чтобы заполнить таблицу совокупных выплат, выражающихся в денежных элементах 1992 года:

$$\times 2.368 \quad \times 1.219 \quad \times 1.082$$

выплаты по искам с нарастающим итогом в денежном выражении 1992 года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	399	999	1217	1317
	1990	600	1363	1663	1799
	1991	436	1036	1263	1367
	1992	500	1184	1443	1561

Осуществим вычитания, чтобы найти величины, выражающиеся в денежных элементах 1992 года, для каждого года:

выплаты по искам в денежном выражении 1992 года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	399	600	218	100
	1990	600	763	300	136
	1991	436	600	227	104
	1992	500	684	259	118

Теперь мы можем использовать коэффициенты будущей инфляции, чтобы спрогнозировать эти величины. Например, запись 259 преобразуется так:

$$259 \times 1.08 \times 1.07 = 299$$

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	500	200	100
	1990	500	700	300	147
	1991	400	600	245	120
	1992	500	739	299	145

Оценка общей величины неоплаченных исков — это сумма записей всех выделенных ячеек:

$$147 + 245 + 120 + 739 + 299 + 145 = 1695$$

3.3 Поправка для вспомогательных переменных

Обсудите альтернативные способы выведения коэффициентов развития, которые подойдут для заполнения треугольников задержки.

Таблица, данная ниже, показывает (в незакрашенных ячейках) коэффициенты развития прошлых лет для нашего примера:

(n3)

коэффициенты развития		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	—	2667	1250	1100
	1990	—	2.400	1.250	1.100
	1991	—	2.500	1.250	1.100
	1992	—	2.500	1.250	1.100

Записи в закрашенных ячейках — это предполагаемые будущие коэффициенты развития, определенные с использованием основного цепочно-лестничного метода. Так как основной цепочно-лестничный метод вычисляет их, базируясь на суммах прошлых исков, он достаточно эффективно оценивает коэффициенты развития будущих лет (например, запись 2500) как среднее по всем известным коэффициентам столбца (то есть, 2667, 2400 и 2500), используя объем исков для соответствующего года событий (строку), как весовой коэффициент.

Мы можем использовать множество подобных методов для оценки будущих коэффициентов развития (и, следовательно, вычислить прогнозируемые иски), базируясь на известных данных в столбце.

Например, мы могли бы:

- применить серию нагрузок, основанных на вспомогательных переменных (например, объем исков), отражающую степень значения, которое мы хотим прибавить к записям каждого года событий
- взять "прямое" среднее значение столбца, если нам надо придать одинаковый вес каждому году событий
- задать некоторые годы с нулевой нагрузкой, если мы хотим исключить их из вычислений
- взять наивысшую запись в столбце, если нам необходимо осуществить очень безопасный подход, чтобы избежать недооценки прогнозируемых исков.
- использовать математические методы, чтобы "подогнать" кривую (диаграмму) к записям столбца, если мы хотим отразить тенденции, присущие коэффициентам развития.

3.4 Метод интервалов

Описать и применить метод интервалов для заполнения треугольника задержки.

(п5)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ/ФОРМУЛА

Метод интервалов предполагает модель: $C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j}$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

1. Коэффициенты развития не изменяются по исходным годам (r_j не $r_{i,j}$).
2. Иски по первому исходному году предполагаются полностью рассмотренными, то есть после года развития 3 в нашем примере нет неоплаченных исков (тогда r_j -ые для всех лет развития, включенные в таблицу, в сумме дают 1).

ЛОГИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Цель метода интервалов — уменьшить искажающие воздействия, возникающие в результате фоновых колебаний объемов исков в различные годы развития. Это осуществляется с помощью деления на нормирующие множители, которые действуют, как заместитель общего числа исков для каждого исходного года. Такая поправка убирает коэффициенты n_i из этой модели.

Ряд уравнений, содержащих только коэффициенты r_j и λ_{i+j} , затем может быть преобразован приравнованием ожидаемых исков, прогнозируемых моделью, с известными данными. Эти уравнения надо решить, чтобы найти оценки для r_j -ых и λ_{i+j} -ых. Затем из формулы могут быть точно вычислены предполагаемые будущие коэффициенты.

ТРЕБОВАНИЯ К ДАННЫМ

Метод интервалов требует два пункта данных в дополнение к основным исковым данным:

1. Запись для каждого исходного года, которая обеспечивает хорошее отображение "объема" исков в этот год. Наиболее распространенная мера — это число исков, предъявленных в течении начального года развития (то есть года развития 0). Если частота предъявления исков сходна для каждого года, эта мера дает ясное отражение возможного конечного числа исков.
2. Предполагаемый коэффициент инфляции исков для каждого будущего прогнозируемого года.

Проиллюстрируем применение метода интервалов на тех же исковых данных, используя дополнительную информацию:

число исков, предъявленных в исходный год	
1989	235
1990	390
1991	230
1992	325

годовой коэффициент инфляции исков (будущих)	
1992/93	8%
1993/94	7%
1994/95	6%

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЫВОД/ИЗЛОЖЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Шаг 1 (деление на нормирующий множитель)

Разделим каждую строку таблицы на нормирующий множитель для этого исходного года, например, для 1991/1:

$$600000/230 = 2609$$

нормированные иски (£)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	1277	2128	851	426
	1990	1282	1795	769	?
	1991	1739	2609	?	?
	1992	1538	?	?	?

Шаг 2 (вычисление r_j -ых и λ_{i+j} -ых)

Теперь нам необходимо определить значения r_j -ых и λ_{i+j} -ых. Опять же, это будет сделано с помощью приравнивания ожидаемых значений к соответственным действительным данным.

ожидаемые значения		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	$r_0\lambda_{89}$	$r_1\lambda_{90}$	$r_2\lambda_{91}$	$r_3\lambda_{92}$
	1990	$r_0\lambda_{90}$	$r_1\lambda_{91}$	$r_2\lambda_{92}$	$r_3\lambda_{93}$
	1991	$r_0\lambda_{91}$	$r_1\lambda_{92}$	$r_2\lambda_{93}$	$r_3\lambda_{94}$
	1992	$r_0\lambda_{92}$	$r_1\lambda_{93}$	$r_2\lambda_{94}$	$r_3\lambda_{95}$

Сумма самой длинной диагонали (которая содержит все λ_{92} -ые) равна:

$$r_0\lambda_{92} + r_1\lambda_{92} + r_2\lambda_{92} + r_3\lambda_{92} = 1538 + 2609 + 769 + 426$$

$$\text{то есть} \quad (r_0 + r_1 + r_2 + r_3)\lambda_{92} = 5342$$

Так как мы полагаем, что первая строка полностью рассмотрена, мы знаем, что: $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = 1$

$$\text{Итак:} \quad \lambda_{92} = 5342$$

Известное значение в последнем столбце (который содержит только r_3) равно:

$$r_3\lambda_{92} = 426$$

$$\text{Тогда} \quad r_3 = 426/\lambda_{92} = 426/5342 = 0.0797$$

Сумма следующей по длине диагонали (содержащей все λ_{91} -ые):

$$r_0\lambda_{91} + r_1\lambda_{91} + r_2\lambda_{91} = 1739 + 1795 + 851$$

$$\text{то есть} \quad (r_0 + r_1 + r_2)\lambda_{91} = 4385$$

Так как $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = 1$, мы знаем, что: $r_0 + r_1 + r_2 = 1 - r_3 = 1 - 0.0797 = 0.9203$

$$\text{Тогда:} \quad \lambda_{91} = 4385/0.9203 = 4765$$

Известное значение в предпоследнем столбце (который содержит только r_2) равно:

$$r_2(\lambda_{91} + \lambda_{92}) = 1620$$

$$\text{Получаем, что} \quad r_2 = 1620/(\lambda_{91} + \lambda_{92}) = 1620/(4765 + 5342) = 0.1603$$

Продолжая таким образом, поочередно используя сумму диагонали, чтобы найти следующее λ_{i+j} , а затем сумму столбца, чтобы найти следующее r_j , можно оценить все параметры.

Простейший способ изложения этих вычислений состоит в том, чтобы записать каждый найденный параметр в таблицу и сохранить промежуточные суммы (как показано в таблице, приведенной ниже). Для λ_{i+j} -ых начинаем в 0 и добавляем каждое новое значение к сумме. Для r_j -ых начинаем в 1 и вычитаем каждое новое значение. Это освобождает нас от повторных вычислений и обеспечивает проверку того, что r_j -ые в сумме дают 1.

Шаг 3 (прогнозирование λ)

Используем предполагаемые будущие коэффициенты инфляции (из таблицы данных), чтобы вычислить "будущие" λ_{i+j} -ые (показанные в таблице, приведенной ниже); например:

$$\lambda_{93} = 1.08 \times \lambda_{92} = 1.08 \times 5432 = 5769$$

		промежуточная сумма			промежуточная сумма
r_0	0.3124	0.0000	λ_{89}	4088	18682
r_1	0.4476	0.3124	λ_{90}	4487	14594
r_2	0.1603	0.7600	λ_{91}	4765	10107
r_3	0.0797	0.9203	λ_{92}	5342	5342
			λ_{93}		
			λ_{94}		
			λ_{95}		

Шаг 4 (вычисление прогнозируемых данных)

Вычислим $n_i r_j \lambda_{i+j}$, чтобы заполнить неизвестные записи; например, для 1991/2:

$$230 \times 0.1603 \times 5769 = 213000$$

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	500	200	100
	1990	500	700	300	179
	1991	400	600	213	113
	1992	500	839	322	169

Шаг 5 (вычисление прогнозируемых данных)

Сложим оцененные записи, чтобы найти общую сумму неоплаченных исков:

$$179 + 213 + 113 + 839 + 332 + 169 = 1835$$

ЗАМЕЧАНИЯ

Последовательные λ -коэффициенты (представляющие "календарные эффекты") обеспечивают отражение коэффициентов инфляции исков (с середины года по середину года), основываясь на прошлых данных. Например, $\lambda_{92}/\lambda_{91} = 1.121$ говорят нам о том, что средняя стоимость иска между 1991 и 1992 годами выросла на 12.1%, опираясь на предположения метода интервалов.

Вопрос для самоподготовки 14.9. Таблица, приведенная ниже, показывает величины исков, оплаченных в каждый год развития для портфеля исков по страхованию частных строений в предыдущем вопросе для самостоятельного решения. Используя метод интервалов, оценить величину неоплаченных исков, поданных по несчастным случаям, произошедшим между 1-ым января 1989 года и 31-ым декабря 1992 года. Предположить 10%-ую инфляцию для будущих лет.

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	8975	5030	1525	425
	1990	12555	6975	2090	
	1991	12120	6885		
	1992	14790			

Вопрос для самоподготовки 14.10. Основываясь на предположениях, лежащих в основе метода интервалов, определить предполагаемый коэффициент инфляции исков для 1989/90.

§4 Краткое изложение

Важной чертой искового процесса в страховании общего вида является резервирование, то есть оценка компонентов исковых резервов, которые включают в себя заявленные, но не урегулированные иски, ИБНР, возобновленные иски и дополнительные траты по искам.

Треугольники развития (или треугольники задержки) предоставляют метод сведения исковых данных в таблицы и изучению лежащей в их основе статистической модели.

Два метода, используемые для прогнозирования исков — это основной цепочно-лестничный метод и метод интервалов. Эти методы могут быть скорректированы с учетом фоновых колебаний между исходными и календарными годами (например, инфляция исков).

§5 Формулы

Коэффициенты развития

$$\text{коэффициент рассмотрения} = \sum_{t=0}^j C_{i,t} / \sum_{t=0}^{j-1} C_{i,t}$$

Статистические модели для треугольников развития

$C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j}$	(общая модель)
$C_{i,j} = n_i r_j + e_{i,j}$	(основной цепочно-лестничный метод)
$C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j}$	(основной цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию)
$C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j}$	(метод интервалов)

Вопросы студентам

В1 Могли бы вы немного побольше рассказать о резервах? Верно ли, что резервы, которые компания, занимающаяся общим страхованием, держит для неоплаченных исков — это только верхушка айсберга в сравнении со всеми остальными резервами, которые она должна иметь?

О1 Компании имеют резервы, чтобы сохранить фонды для выплат, которые они будут обязаны сделать в будущем. В случае контора по страхованию жизни или пенсионных фондов, где премии могут быть получены за услуги, которые, возможно, не будут оплачиваться в ближайшие 40 лет, резервы будут накапливаться в течение очень долгого периода.

Однако, для компаний, занимающихся общим страхованием, где большинство контрактов покрывают период в один год, типично, что резервы будут храниться в течение нескольких лет; до тех пор, пока иски, относящиеся к этому периоду, будут рассматриваться. Итак, в действительности, резервы для неоплаченных исков — это большая часть резервов общего страхования.

Специалисты, занимающиеся общим страхованием, могут также держать другие резервы; например, резервы для *возобновленных* исков (в случае, если становится необходимым возобновить закрытые иски в свете новой информации) или для *катастроф* (чтобы покрыть периоды особо тяжелых исков). Также, ввиду того, что премии обычно платятся заблаговременно, необходимо держать резервы *премий*, состоящие из долей уже полученных премий, относящихся к периодам покрытия, начинающимся после конца текущего года.

В2 Есть ли различие между "треугольником развития" и "треугольником задержки"?

О2 Нет. Это просто разные названия одного и того же. Также, они иногда называются "треугольниками рассмотрения".

В3 Можно ли пропустить Шаг 4 в вычислениях основного цепочно-лестничного метода и найти неоплаченные величины с помощью вычитания записей, находящихся на главной диагонали, из строки итоговых накоплений (последней строки таблицы)?

- О3** Как вы уже обратили внимание, конечные данные можно найти прямо из Шага 3. Однако, записи на Шаге 4 обеспечивают полезную проверку вычислений. На этом шаге могут быть выявлены важные ошибки, из-за того, что данные могут явно "выглядеть неправильными". Кроме того, записи Шага 4 показывают, когда, как ожидается, будут произведены выплаты. В случае применения цепочно-лестничного метода с *инфляционной поправкой*, вы должны будете включить этот шаг, чтобы корректно предусмотреть будущую инфляцию.
- В4** Могут ли компании использовать только индекс розничных цен RPI (от английского "Retail Price Index") для инфляции исков?
- О4** Обычно, нет. Этот индекс отражает рост средней стоимости определенного типа страховых исков. Для других типов исков (например, компенсационных выплат травмированным людям), иски могут расти гораздо быстрее, чем цены товаров народного потребления.
- В5** Объясните название метода "интервалов". Что он разделяет?
- О5** Метод интервалов разделяет долговременные влияния, то есть влияния, относящиеся к календарным годам. Как мы уже заметили, цепочно-лестничный метод может дать обманчивые результаты, если прошлые долговременные изменения (например, инфляция) не продолжаются с такими же коэффициентами в будущем.
- В6** Базируются ли количества исков в примерах на данных реальных компаний?
- О6** Нет. Это выдуманные данные. Однако, они дают яркое отражение для шаблонов некоторых типов страховых исков. Мы использовали округленные числа и различные ячейки каждого года для предположений инфляции, чтобы упростить вычисления для следующих лет.
- В7** Используются ли на практике основной цепочно-лестничный метод и метод интервалов?
- О7** Основной цепочно-лестничный метод используется довольно широко, особенно для нахождения быстрых первоначальных оценок. Ме-

тод интервалов встречается в реальной практике относительно редко.

В8 Существуют только эти методы для прогнозирования страхования неоплаченных исков?

О8 Нет. Есть множество различных методов и их разновидностей. Некоторые методы приводятся в Теме 6, включая методы определения средней стоимости иска и метод Борнхуттера-Фергюсона.

В9 Я слышал от моего друга, работающего в общем страховании, о "нетто-убыточности". Не могли бы вы рассказать, что это такое?

О9 Доля исковых убытков (или нетто-убыточность) и доля затрат (брутто-убыточность) используются, чтобы оценить, как осуществляются дорогостоящие страховые иски и затраты. Эти коэффициенты для данных рассматриваемых лет вычисляются так:

$$\text{Нетто-убыточность} = \frac{\text{Произошедшие иски}}{\text{Полученные премии}} \text{ и}$$

$$\text{Брутто-убыточность} = \frac{\text{Затраты (включая комиссию)}}{\text{Брутто-премии}}$$

"Произошедшие иски" — это оценка общей величины исков, относящихся к событиям, случившимся в течение рассматриваемого года и "полученные премии" — это доля премий, используемая для покрытия выплат в течение этого года. В качестве примерного ориентира "типичных" значений для "типичных" сфер деятельности в "типичные" годы могут быть названы нетто-убыточность — 70% и брутто-убыточность — 30%.

Подсказки для ответов на вопросы

1. Вопросы к этой теме в основном содержат довольно сложную арифметику. Проверьте, чтобы ваши числа выглядели подходящими на каждой стадии, тогда вам не придется тратить время на возврат и пересчет.
2. Применяйте различные методы, чтобы сделать вычисления быстрее. Это поможет, если проводите вычисления в стандартном виде.
3. Вычисление параметров метода интервалов может быть кратко охарактеризовано фразой: *"Используйте диагональные суммы, чтобы найти λ . Используйте суммы по столбцам, чтобы найти r ".*
4. Годы развития иногда обозначаются $1, 2, 3, \dots$, вместо $0, 1, 2, \dots$. Первый год развития обычно является годом, совпадающим с исходным годом. Используйте общий подход, чтобы быть уверенными, что интерпретировали информацию корректно.
5. Похожим образом, календарные годы могут обозначаться в относительных величинах, то есть $0, 1, 2, \dots$, вместо абсолютных значений, то есть $1989, 1990, 1991, \dots$. Это не играет никакой роли для метода вычислений.

§6 Ответы на вопросы для самоподготовки

Решение 14.1

ИБНР-резерв соответствует левой стрелке. Резерв предъявленных, но не оплаченных исков, соответствует средней стрелке.

(Для правой стрелки не будет затребовано никаких резервов, так как все выплаты по этим искам уже были сделаны. Однако, на практике, страховщик должен держать резервы для *возобновленных исков*, чтобы предусмотреть вероятность того, что дело иска было закрыто "слишком быстро" и понадобятся дополнительные выплаты).

Решение 14.2

- (а) Выплата в 1990/2 равна £300000.
- (б) Общая сумма исков, оплаченных в 1992 году, — это сумма элементов самой длинной диагонали:

$$500000 + 600000 + 300000 + 100000 = £1500000$$

Решение 14.3

- (а) Таблица будет включать в себя все иски, относящиеся к *несчастным случаям, которые произошли* между 1-ым января 1989 года и 31-ым декабря 1992 года. Значит она будет содержать и заявленные, но не урегулированные иски, и ИБНР-иски.
- (б) Таблица будет включать в себя все иски, *предъявленные* между 1-ым января 1989 года и 31-ым декабря 1992 года. Поэтому она будет содержать ЗНУ иски, но не будет содержать ИБНР-иски.

Решение 14.4

Простейший способ это сделать — поработать с исками с нарастающим итогом, как показано на таблице ниже. Затем мы можем применить коэффициенты развития, чтобы вычислить выплаты для будущих лет.

Например, совокупная выплата для 1991/2 равна: $1000 \times 1.250 = £1250$

выплаты по искам с нарастающим итогом (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	800	1000	1100
	1990	500	1200	1500	1650
	1991	400	1000	1250	1438
	1992	500	1250	1625	1788

Решение 14.5

В этом примере только 3 исходных года и года развития. Перемножение соответствующих параметров дает следующую таблицу:

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития		
		0	1	2
год событий	1990	900	495	180
	1991	1155	630	219
	1992	1152	600	208

Величина неоплаченных исков равна: $219 + 600 + 208 = 1027$, то есть £1027000.

Решение 14.6

n_i будет показывать общее число исков, заявленных в исходный год i . r_j будет показывать долю исков, выплаты по которым были сделаны в год развития j . λ_{i+j} будет равно 1, так как мы рассматриваем количество исков.

Решение 14.7

Основываясь на исходных годах до 1990, коэффициент развития года 3 по отношению к предшествующим годам равен:

$$\frac{100}{300 + 500 + 200} = \frac{1}{10}$$

Общая сумма по первым трем годам развития для 1990 года равна: $500 + 700 + 300 = 1500$

Тогда, мы можем ожидать, что запись в ячейке 1990/3 будет такой: $\frac{1}{10} \times 1500 = 150$

Решение 14.8

Когда мы имеем дело с *количеством* исков, основной цепочно-лестничный метод может быть применен точно таким же способом:

Таблица накоплений числа исков выглядит так:

совокупное число исков		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	17500	22500	24750	25500
	1990	21000	27200	29950	30858
	1991	18800	24300	26745	27555
	1992	21300	27508	30275	31193

Прогнозируемое окончательное число исков — это общая сумма последнего столбца:

$$25500 + 30858 + 27555 + 31193 = 115106$$

Решение 14.9

Вам надо использовать первый столбец таблицы из предыдущего примера, как нормирующий множитель для исходных лет.

число исков, предъявленных в исходный год (000)	
1989	17.5
1990	21.0
1991	18.8
1992	21.3

Деление каждой строки на эти коэффициенты дает:

нормированные иски (£)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	513	287	87	24
	1990	598	332	100	
	1991	645	366		
	1992	694			

Суммы по диагоналям и по столбцам для этой таблицы равны:

Диагональ	513	885	1064	1184
Столбец	2450	985	187	24

Таблица, приведенная ниже, показывает вычисленные значения параметров. Подробные вычисления таковы:

$$\begin{aligned}
 r_3 &= 24/1184 = 0.0203 & \lambda_{92} &= 1184 \\
 r_2 &= 187/2270 = 0.0824 & \lambda_{91} &= 1064/0.9797 = 1086 \\
 r_1 &= 985/3256 = 0.3025 & \lambda_{90} &= 885/0.8973 = 986 \\
 r_0 &= 2450/4118 = 0.5949 & \lambda_{89} &= 513/0.5948 = 862
 \end{aligned}$$

(В этом случае r_j -ые в сумме не дают 1, так как вычисления приближенные.)

Будущие коэффициенты λ :

$$\lambda_{93} = 1.10 \times 1184 = 1302$$

$$\lambda_{94} = 1.10 \times 1302 = 1432$$

$$\lambda_{95} = 1.10 \times 1432 = 1575$$

		промежуточная сумма			промежуточная сумма
r_0	0.5949	0.0000	λ_{89}	862	4118
r_1	0.3025	0.5948	λ_{90}	986	3256
r_2	0.0824	0.8973	λ_{91}	1086	2270
r_3	0.0203	0.9797	λ_{92}	1184	1184
	1.0001		λ_{93}	1302	
			λ_{94}	1432	
			λ_{95}	1575	

Используя эти значения нормирующих множителей, мы можем дополнить таблицу:

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	8975	5030	1525	425
	1990	12555	6975	2090	555
	1991	12120	6885	2017	547
	1992	14790	8389	2513	681

Величина неоплаченных исков равна: $555 + 2017 + \dots + 681 = 14702$, то есть £14702.

Решение 14.10

Предполагаемый коэффициент инфляции исков для 1989/90 может быть найден из соотношения между λ :

$$\frac{\lambda_{90}}{\lambda_{89}} = \frac{986}{862} = 1.144, \quad \text{то есть } 14.4\%$$