Глава 12

Временные ряды

Цели главы

К концу данной главы вы будете уметь:

- определять и опознавать основные виды процессов временных рядов, действующих в дискретном времени;
- определять и вычислять автокорреляционные функции;
- объяснять стационарность и дифференцирование временных рядов.

§1 Введение

Временной ряд — это просто ряд значений соответствующий сделанным измерениям в различные моменты времени. Временной ряд может быть множеством данных, полученных в результате фактических измерений "реальной" деятельности или может быть математической моделью или компьютерным моделированием этой деятельности.

Временной ряд может функционировать в дискретном времени, если измерения могут быть сделаны только в дискретные интервалы времени (например, RPI, публикуемые ежемесячно) или в непрерывном времени, если значения эффективно достижимы непрерывно (например, FTSE показатели обновляются каждые 2 минуты в течение часа торговли производственной деятельности). В этой главе мы будем интересоваться процессами временных рядов, функционирующих в дискретном времени. Пуассоновский процесс, который мы рассматривали в главе 5, является примером непрерывного временного ряда.

Наши основные интересы, связанные с временными рядами, связаны с приложениями в экономике, общем страховании и демографии, например, для моделирования экономических показателей, цен товаров, процентных ставок, производства в стране, количества страховых исков, количества смертей от различных причин, количество безработных в отдельных отраслях промышленности.

Однако, временные ряды активно применяются и в других областях, таких как эпидемиология (например, для планирования программ вакцинации), социальное планирование (например, сколько школ/учителей/врачей требуется), гражданское строительство (сколько машин будет пользоваться определенными дорогами).

Цель изучения временных рядов опознавать работу фундаментальных процессов. Пониманию этих процессов может способствовать прогнозируемые в будущем процентные ставки, инфляция, коэффициенты смертности, количество страховых исков и т. д.

Временные ряды имеют приложения в экономическом моделировании и в общем страховании для определения изменений моделей исков, оценок резервного фонда и премий.

Вы можете захотеть рассмотреть свойства ковариаций (из главы 4 раздел С1) и дисперсий линейных комбинаций случайных величин (из главы 5 раздел С1), которые мы будем использовать в этой главе.

§2 Компоненты аддитивного временного ряда

2.1 Определение компонент аддитивного временного ряда

Объясняет, что это означает по принципу направленной, периодической, сезонной и нерегулярной компонент.

На практике временные ряды часто можно разбить на четыре компоненты, представляющие дисперсию различных частот.

Компоненты аддитивного временного ряда

Временной ряд X_t, $t = 1, 2, 3, \ldots$ может рассматриваться как сумма четырех компонент:

$$X_t = \text{Напр}_t + \text{Пер}_t + \text{Сез}_t + \text{Случ}_t$$

где Напр_t обозначает основную направленную и

$Пер_t$, $Сез_t$, $Случ_t$ обозначают периодическую, сезонную и случайную компоненты.

$$Ряд = Направленная + Периодическая + Сезонная + Случайная$$

Направленная компонента ($Напр_t$)

Многие временные ряды отображают направленность, то есть долгосрочное движение основной степень значимости. Направленности возникают в результате фундаментальных изменений первопричин. Например:

- Количество смертей в результате определенных болезней может неуклонно снижаться вследствие достижений медицины.
- Экономические измерения, связанные с уровнем жизни (например, уровни выплат, производство в стране), могут неуклонно возрастать в результате увеличения производительности.
- Количество несчастных случаев может неуклонно снижаться в результате улучшений безопасности мероприятий или большей общественной информированности об отдельных рисках.

Направленность должна действовать в одном направлении (то есть вверх или вниз) в течение рассматриваемого периода, но она не обязательно должна быть линейной. Направленности обычно можно удалить дифференцированием.

Периодическая компонента ($Пер_t$)

Многие временные ряды отображают суперпозиционную периодическую структуру с частотой в несколько лет. Например:

- Многие экономические показатели отображают экономический цикл, по которому экономика многократно движется от периода развития к последующему периоду спада.
- Цикл в страховании представлен в общем страховом рынке, где размеры премий уменьшаются в течение нескольких лет, а затем снова увеличиваются.

Может быть сложно строго определять периодические компоненты, отчасти потому, что период цикла может быть не постоянный.

Сезонная компонента ($Сез_t$)

Многие временные ряды отображают регулярную сезонную структуру с частотой ровно один год. Это может быть вследствие погодных условий или факторов, навязанных календарем. Например:

- Уровень безработицы обычно выше в зимние месяцы, потому что некоторые виды работ не могут выполняться в плохих погодных условиях.

- Частота исков по многим видам страхования увеличивается в определенное время года, например, наибольшее количество исков автомобильного страхования приходится в туманные и скользкие месяцы.

- Продажи в магазинах на главных улицах могут возрастать в периоды Рождества и Нового Года.

Сезонные компоненты могут быть удалены с помощью поправки, учитывающей сезонные изменения (например, устранением сезонных колебаний в данных по безработице). Это получено усреднением всех данных за январь и т. д. за несколько лет, чтобы найти относительное отклонение для каждого месяца, и затем вычесть отклонение.

Если временной ряд показывает годовые данные, то сезонная компонента отсутствует.

Случайная компонента (Случ$_t$)

Всегда ряд, основанный на измерениях реальных эффектов, включает в себя нерегулярную случайную компоненту. Это может быть в результате погрешности измерения или просто присуще случайности ("шум"), присутствующей в измеряемом эффекте. Нерегулярности также могут появляться вследствие исключительных событий ("выбросы"). Например:

- Такой экономический показатель как валовый внутренний продукт является сложным для точного измерения, поэтому публикуемые данные будут иметь погрешности измерения.

- Количество людей, умирающих каждый месяц, будет различаться, потому что "смерть непредсказуема".

- Забастовка может привести к необъяснимому уменьшению объема продаж компании.

- Ураган может привести к увеличению числа исков по страхованию зданий.

Искажения, вызванные случайной компонентой, могут быть уменьшены с помощью сглаживающих методов, таких как скользящего среднего.

Четыре компоненты объединены в таблице, приведенной ниже.

Компонента	Периодичность	Примеры
Направленная	Длительный срок (то есть длиннее, чем рассматриваемый период)	длительный срок повышает производительность, уровень жизни, техники и безопасности
Периодическая	Средний срок (обычно от 5 до 10 лет)	Экономический цикл, страховой цикл
Сезонная	Ежегодная	Эффекты, связанные с погодой; эффекты, связанные с календарным годом
Случайная	Нерегулярная	Случайное отклонение, погрешность измерения, выбросы

Вопрос для самоподготовки 12.1. Приведите примеры факторов, которые могут изменять каждую из компонент Напр_i, Пер_i, Сез_i, Случ_i для следующего временного ряда X_t:

(a) количество людей, погибших в результате несчастных случаев на дороге в Великобритании за последние месяцы

(b) количество страховых полисов для путешествующих, продаваемые каждую неделю

(c) количество детей, родившихся в Великобритании за последние месяцы

(d) количество краж в домах, сообщаемых каждый день

(e) население мира за каждый год, начиная с 1500 года

Пример 12.1 Таблица, приведенная ниже, показывает количество зарегистрированных безработных человек (в тысячах) в отдельных областях. Используя данные за первые 5 лет, вычислите данные в 1992 году с устранением сезонных колебаний.

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
1987	317	328	329	316	300	282	263	250	247	258	276	297
1988	315	323	321	311	293	274	255	243	244	254	272	293
1989	311	321	319	309	290	269	252	239	239	248	265	285
1990	303	312	310	302	283	265	248	237	235	246	263	284
1991	300	309	309	297	278	257	238	227	228	239	258	278
1992	295	306	305	295	276	253	233	220	219	228	244	261

Решение Мы можем вычислить сумму, среднее значение и отклонение от общего среднего для каждого месяца, основываясь на эти первые 5 лет. Результаты приведены в первой таблице ниже.

Применяя отклонения от общего среднего к данным за 1992 год, получим данные с устранением сезонных колебаний. Например, данные за январь на 30000 больше среднего значения данных по безработице, поэтому данные с устранением сезонных колебаний получаются вычитанием 30000 из зарегистрированных данных. Скорректированные данные приведены во второй таблице ниже.

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
Сумма	1546	1593	1588	1535	1444	1347	1256	1196	1193	1245	1334	1437
средн. знач.	309	319	318	307	289	269	251	239	239	249	267	287
отклонение	30	40	39	28	10	-10	-28	-40	-40	-30	-12	8

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
Зарегистр. данные	295	306	305	295	276	253	233	220	219	228	244	261
Скоррект. данные	265	266	266	267	266	263	261	260	259	258	256	253

2.2 Стационарный временной ряд

Как мы увидели в Секции 2, последовательные значения временных рядов связаны определенным образом. В оставшейся части этой секции мы рассмотрим некоторые свойства, которые могут быть использованы, чтобы описать природу этой взаимосвязи.

Одно полезное свойство, которым обладают некоторые временные ряды —это стационарность.

Стационарный временной ряд

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ стационарный, если для любого значения n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ совместное распределение $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ такое же, как и совместное распределение $X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \ldots, X_{t_n+k}$ для всех значений $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и для всех значений k.

"Совместное распределение стационарного временного ряда зависит только от величины интервалов между моментами времени, когда принимаются значения."

Стационарность соответствует интуитивной идее, что ряд не имеет тенденцию или предсказуемый период. Однако это не значит, что ряд совершенно случайный и успешные прогнозы насчет будущих значений невозможны. Временной ряд, в котором будущие значения ряда зависят от прошлых значений может, однако, быть стационарным.

Пример 12.2 Покажите, что стационарный временной ряд не может иметь продолжительную направленность.

Решение Если мы воспользуемся определением стационарности при $n = 1$ и $t_1 = t$, то это дает нам, что распределение стационарного временного ряда X_t должно быть таким же, как и совместное распределение X_{t+k} для всех значений t и k.

В частности, это означает, что $E(X_t) = E(X_{t+k})$ для всех значений k.

Другими словами, нет направленности в значениях X_t.

Вопрос для самоподготовки 12.2. Покажите, что стационарный временной ряд данных за месяц не может иметь сезонную составляющую.

2.3 Дифференцирование временных рядов

Часто полезно рассматривать разницу между последовательными значениями временных рядов (то есть значения $X_t - X_{t-1}$), чем непосредственно значения. Причина этого в том, что дифференцирование нестационарных рядов часто приводит к стационарным рядам, а стационарные ряды легче исследовать.

Для использования удобны оператор обратного сдвига и оператор обратной разности.

Оператор обратного сдвига

Оператор обратного сдвига B определяется следующим образом:$BX_t = X_{t-1}$

"Использует предыдущее значение"

Оператор обратной разности

Оператор обратной разности ∇ определяется следующим образом:$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$ или $(X_t - BX_t)$

"Вычитание предыдущего значения из текущего значения"

Символично операторы ∇ и B связаны соотношениями: $\nabla = 1 - B$ и $B = 1 - \nabla$.

В некоторых случаях может быть необходима разность более высокого порядка, тогда вычисления содержат $\nabla^2 X_t$, $\nabla^3 X_t$ и т.д. Они называются разностью второго порядка, разностью третьего порядка и т.д.

Обратный процесс, "восстанавливающий"ряд из разности, называется интегрированием

Вопрос для самоподготовки 12.3. Покажите, что $\nabla^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

Вопрос для самоподготовки 12.4. Напишите основную формулу для восстановления первоначальных значений X_t временного ряда из разности W_t и предыдущих значений X, если

(a) используются разности первого порядка, то есть $W_t = \nabla X_t$

(b) используются разности второго порядка, то есть $W_t = \nabla^2 X_t$

2.4 Автоковариация и автокорреляция

Другой пригодный для использования способ описания взаимосвязи последовательных значений, включает в себя вычисление автоковариационной и автокорреляционной функций ряда.

Автоковариационная функция

Автоковариационная функция для X_{t_1} и X_{t_2}:

$$\gamma(t_1, t_2) = cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = E[(X_{t_1} - E(X_{t_1}))(X_{t_2} - E(X_{t_2}))]$$

Для стационарного процесса:

$$\gamma(k) = cov(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t+k} - E(X_{t+k}))]$$

Объяснение

Автоковариационная функция — это непосредственно ковариация значений ряда, полученных в два разных момента времени.

Для стационарного ряда это будет зависеть только от величины "интервала то есть разности между двумя моментами времени. Поэтому автоковариационная функция может быть определена правильно в терминах разности времени k, которая называется запаздывание.

Интуитивно, автоковариация это мера степени связи между значениями в разные моменты времени, то есть величина, которой они "взаимосвязаны".

Заметим, что для дискретного временного ряда автоковариационная функция может быть определена функцией множества, соответствующей запаздываниям $k = 1, 2, 3, \ldots$ единиц времени.

График, приведенный ниже, показывает автоковариационную функцию для дискретного временного ряда, для которого есть сильная связь на протяжении короткого промежутка времени, но не на протяжении длительного промежутка времени.

Автокорреляционная функция (АКФ)

Автокорреляционная функция измеряется в квадратных единицах, поэтому эти значения получаются зависят от размеров абсолютной величины. Мы можем сделать эту величину независимой от абсолютной величины X_t, определяя ее безразмерной величиной, и автокорреляционная функция:

Автокорреляционная функция (АКФ) Автокорреляционная функция для X_{t_1} и X_{t_2}:

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{cov(X_{t_1}, X_{t_2})}{\sqrt{Var(X_{t_1})Var(X_{t_2})}} = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sqrt{\gamma(t_1, t_1)\gamma(t_2, t_2)}}$$

Для стационарного процесса:

$$\rho(k) = \frac{cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

Кроме того, автокорреляционная функция это мера степени связи между значениями в разные моменты времени.

Возможные значения автокорреляционной функции находятся между -1 и $+1$. Значение ноль означает, что связи нет. Значение $+1$ (или -1) означает сильную положительную (или отрицательную) связь, то есть значения имеют тенденцию перемещаться в одинаковых (или противоположных) направлениях.

Вопрос для самоподготовки 12.5. Опишите связи, которые вы предполагаете найти для временного ряда, представляющего среднесуточную температуру последовательных месяцев в отдельном городе, и, следовательно, изобразите график автокорреляционной функции для этого ряда.

Когда точная статистическая сущность ряда известна, автоковариационная и автокорреляционная функции могут быть найдены алгебраически.

В других случаях мы можем оценить автоковариационную и автокорреляционную функции, основываясь на наблюдаемые значения ряда.

Выборочные коэффициенты автоковариации

Выборочный коэффициент автоковариации с запаздыванием k основывается на n наблюдаемых значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ временного ряда:

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(x_t - \overline{x})(x_{t+k} - \overline{x})$$

Выборочный коэффициент автоковариации с запаздыванием k обеспечивает оценку автоковариационной функции с запаздыванием k.

Заметим, что знаменатель равен n, несмотря на то, что в сумме $n-k$ слагаемых.

Выборочные коэффициенты автокорреляции

Выборочный коэффициент автокорреляции с запаздыванием k основывается на n наблюдаемых значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ временного ряда:

$$r_k = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n-k}(x_t - \overline{x})(x_{t+k} - \overline{x})}{\sum\limits_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2} = \frac{c_k}{c_0}$$

Выборочный коэффициент автокорреляции с запаздыванием k обеспечивает оценку автокорреляционной функции с запаздыванием k.

Вопрос для самоподготовки 12.6. Найдите выборочный коэффициент автокорреляции с запаздыванием 1 месяц, 2 месяца и 6 месяцев, основываясь на следующие 12 последовательных значений месячного временного ряда:

$$4, 5, 6, 3, 3, 1, 0, 1, 3, 2, 3, 5$$

Прокомментируйте свои ответы.

§3 Процессы временного ряда

Ранее были определены: авторегрессивный процесс (АР), процесс скользящего среднего (СС) и авторегрессивный процесс скользящего среднего (АРСС), АРИСС(p, d, q) процесс и определена автокорреляционная функция для младших порядков АР, СС и АРСС процессов.

3.1 Основные процессы временного ряда

В этом параграфе мы будем рассматривать различные виды процессов временного ряда.

Чисто случайные процессы

Простейшая форма временного ряда — это чисто случайный процесс

Чисто случайный процесс

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ — чисто случайный процесс, если значения X_t статистически независимы.

В большинстве случаев предполагается, что значения чисто случайного процесса одинаково распределены, то есть распределение не меняется со временем. Поэтому прошлые значения не могут быть использованы для прогнозирования будущих значений.

Применение

Чисто случайный процесс может быть использован для моделирования случайного статистического "шума".

Примеры

Случайная составляющая в аддитивном временном ряду может быть смоделирована с использованием чисто случайного процесса.

Случайные блуждания

Другая форма временного ряда это случайное блуждание:

Случайные блуждания

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ — случайное блуждание, если значения X_t могут быть представлены в форме:

$$X_t = X_{t-1} + Z_t$$

где Z_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ чисто случайный процесс.

Поэтому будущие значения ряда зависят от истории ряда, и прошлые значения могут быть использованы для прогнозирования будущих значений.

Применение

Случайные блуждания могут использоваться для моделирования ситуаций, когда текущее значение случайной переменной изменяется вследствие небольших изменений предыдущего значения, и изменения могут считаться случайными.

Примеры

Многие экономические показатели могут считаться случайными блужданиями. Примеры включают в себя:

- рыночную цену акций
- ставку процента
- валютные ценности

Значение показателя завтра может быть обоснованно корректировкой сегодняшнего значения.

В теории вероятности чистый выигрыш игрока в последовательных играх может быть смоделирован с использованием случайного блуждания.

В теории разорения прибыль страховщика в последовательные промежутки времени может быть смоделирована с использованием случайного блуждания.

В физике движение мелких частиц (Броуновское движение) может быть смоделировано с использованием случайного блуждания в трехмерном пространстве. Теория может использоваться для установления свойств диффузии в газах.

Пример 12.3 Выведите формулу вариации X_t, если X_t — случайное блуждание, определенное как $X_t = X_{t-1} + Z_t$, где Z_t имеет постоянное среднее значение μ и дисперсию σ^2, и $X_0 = 0$.

Решение Последовательной заменой значений X_{t-1}, X_{t-2} и т.д. в определении, мы можем выразить X_t в виде:

$$X_t = X_{t-1} + Z_t = X_{t-2} + Z_{t-1} + Z_t = \ldots = X_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{t-1} + Z_t$$

Так как $X_0 = 0$, то:

$$X_t = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{t-1} + Z_t$$

Так как все Z_t являются чисто случайными процессами, то их значения независимы.

Поэтому:

$$Var(X_t) = Var(Z_1) + Var(Z_2) + \ldots + Var(Z_{t-1}) + Var(Z_t) = t\sigma^2$$

Вопрос для самоподготовки 12.7. Покажите, что случайное блуждание, определенное в предыдущем примере не является стационарным процессом, но стационарным является процесс, определенный разностями $X_t - X_{t-1}$.

Процессы скользящего среднего

Процесс скользящего среднего — это взвешенное среднее чисто случайного процесса:

Процесс скользящего среднего

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ — процесс скользящего среднего порядка q (сокращенно СС(q)), если он может быть представлен как взвешенное среднее $q+1$ последовательных элементов чисто случайного ряда Z_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ со средним значением ноль и постоянной дисперсией σ^2:

$$X_t = Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

Так как Z могут содержать в себе произвольный масштабный множитель, то обычно предполагается, что они определены так, что коэффициент при Z_t равняется 1 (то есть $\beta_0 = 1$).

Применение Процесс скользящего среднего может использоваться для моделирования ситуаций, когда текущее значение случайной переменной может быть обоснованно взвешенным средним основного ряда.

На практике процесс скользящего среднего часто конструируется путем сглаживания временного ряда, то есть удалением компоненты случайного шума.

Примеры

Многие экономические измерения могут быть усреднены по периоду сглаживания случайных изменений.

Компания может усреднить свои продажи за трехмесячный период, когда нужно оценить, насколько быстро (или наоборот) она увеличивается.

Основной страховщик может усреднить иски по некоторым видам страхования за трехлетний период, чтобы уменьшить влияние случайных изменений по отдельным годам.

Пример 12.4 Процесс скользящего среднего определен как $X_t = Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-1} + Z_{t-q}$, где Z являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами со средним значением ноль. Выведите выражения для:

(a) среднего значения $E(X_t)$

(b) вариации $Var(X_t)$

(c) автоковариационную функцию $\gamma(k)$ $(0 \leqslant k \leqslant q)$

(d) автокорреляционную функцию $\rho(k)$ $0 \leqslant k \leqslant q)$

Решение

(a) Так как Z имеют среднее значение ноль:

$$E(X_t) = E(\beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}) = 0$$

(b) Так как Z независимы:

$$Var(X_t) = Var(\beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q})$$

$$= \beta_0^2 Var(Z_t) + \beta_1^2 Var(Z_{t-1}) + \ldots + \beta_q^2 Var(Z_{t-q}))$$

$$= (\beta_0^2 + \beta_1^2 + + \ldots + \beta_q^2)\sigma^2$$

(c) Ковариация Z_s и Z_t это $Var(Z_t) = \sigma^2$, если $s = t$ и ноль в других случаях. Поэтому автоковариационная функция (при $(0 \leqslant k \leqslant q)$):

$$\gamma(k) = CovZ(X_t, X_{t+k}) = Cov\begin{pmatrix} \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-1} + Z_{t-q}, \\ \beta_0 Z_{t+k} + \beta_1 Z_{t+k-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-1} + Z_{t+k-q} \end{pmatrix}$$

$$= (\beta_0\beta_k + \beta_1\beta_{k+1} + \ldots + \beta_{q-k}\beta_q)\sigma^2$$

(d) Автокорреляционная функция получается делением на автоковариационную функцию с параметром 0. Из (c) следует, что $\gamma(0) = \beta_0^2 + \beta_1^2 + + \ldots + \beta_q^2)\sigma^2$. Поэтому автокорреляционная функция (при $(0 \leqslant k \leqslant q)$):

$$\rho(k) = \frac{\beta_0\beta_k + \beta_1\beta_{k+1} + \ldots + \beta_{q-k}\beta_q}{\beta_0^2 + \beta_1^2 + + \ldots + \beta_q^2)\sigma^2}$$

Вопрос для самоподготовки 12.8. Какова $\gamma(k)$ для СС(q) процесса, если $k > q$

Авторегрессивные процессы

Авторегрессивный процесс — это взвешенное среднее прошедших значений объединенных в чисто случайного процесса:

Авторегрессивный (АР) процесс

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ — авторегрессивный процесс порядка p (сокращенно АР(p)), если он может быть представлен как взвешенное среднее p прошедших элементов плюс чисто случайный ряд Z_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ со средним значением ноль и постоянной дисперсией σ^2:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t$$

Пример 12.5 Предположите, какая цена товара может быть смоделирована авторегрессивным процессом.

Решение Если мы сделаем простое предположение, что каждый день цена товара X_t увеличивается или уменьшается относительно цены предыдущего дня X_{t-1} на случайную величину Z_t, зависящую от относительного количества продавцов и покупателей, тогда цена товара может быть смоделирована как $X_t = X_{t-1} + Z_t$, то есть как авторегрессивный процесс порядка 1.

Пример 12.6 Если X_t — АР(1) процесс с $\alpha_1 = 1/2$, выразите X_t в терминах Z.

Решение Процесс определяется $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + Z_t$. Перегрупируем это определение, получим:

$$Z_t = X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} = X_t - \frac{1}{2}BX_t = (1 - \frac{1}{2}B)X_t$$

Выразим ряд, получим:

$$X_t = (1 - \frac{1}{2}B)^{-1}Z_t = (1 + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}B^2 + \ldots)Z_t =$$

$$= Z_t + \frac{1}{2}Z_{t-1} + \frac{1}{4}Z_{t-2} + \ldots$$

Вопрос для самоподготовки 12.9. Выведите выражения для среднего значения и дисперсии АР(1) процесса $X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t$ для тех значений α, для которых процесс стационарный.

Метод, приведенный в следующем примере, может использоваться для вычисления автоковариационных функций временных рядов более высокого порядка.

Пример 12.7 Авторегрессивный стационарный временной ряд W_t определяется выражением:

$$W_t = 0.6W_{t-1} + 0.4W_{t-2} - 0.1W_{t-3} + Z_t$$

для целочисленных моментов времени t, где Z_t представляет собой множество некоррелированных случайных величин со средним значением ноль и дисперсией σ^2.

(a) Объясните, почему $Cov(W_t, Z_{t+1}) = 0$ и $Cov(W_{t-1}, W_t) = Cov(W_{t-1}, W_{t-2})$

(b) Учитывая $Cov(W_t, W_{t-k})$ при $k = 1, 2, 3$ и $Var(Z_t)$, напишите четыре уравнения, связывающие значения автоковариационных функций $\gamma(k)$ с запаздываниями $k = 0, 1, 2, 3$.

(c) Следовательно, определите выражения в терминах σ^2 для $\gamma(k)$ с запаздываниями $k = 0, 1, 2, 3$.

Решение

(a) W_t зависит только от $Z_t, Z_{t-1}, \ldots$, то есть от "прошедших"Z, которые не коррелированы с "будущими"Z. Поэтому $Cov(W_t, Z_{t+1}) = 0$. Так как W_t стационарный, только "интервал"имеет значение. Поэтому $Cov(W_{t-1}, W_t)$ и $Cov(W_{t-1}, W_{t-2})$ обе равны γ_1.

(b) При $k = 1$ мы имеем:

$$Cov(W_t, W_{t-1}) = 0.6Cov(W_{t-1}, W_{t-1}) + 0.4Cov(W_{t-2}, W_{t-1}) - 0.1Cov(W_{t-3}, W_{t-1})$$

Поэтому получаем:

$$\gamma_1 = 0.6\gamma_0 + 0.4\gamma_1 - 0.1\gamma_2 \qquad \ldots(1)$$

Аналогичным образом при $k = 2$ и $k = 3$ получаем выражения:

$$\gamma_2 = 0.6\gamma_1 + 0.4\gamma_0 - 0.1\gamma_1 \qquad \ldots(2)$$

$$\gamma_3 = 0.6\gamma_2 + 0.4\gamma_1 - 0.1\gamma_0 \qquad \ldots(3)$$

Чтобы получить четвертое выражение, мы выразим Z_t из определения временного ряда:

$$Z_t = W_t - 0.6W_{t-1} - 0.4W_{t-2} + 0.1W_{t-3}$$

(c) Беря дисперсию обоих частей уравнения, получаем:

$$\sigma^2 = \gamma_0 + 0.6^2\gamma_0 + 0.4^2\gamma_0 + 0.1^2\gamma_0 +$$

$$+2(-0.6\gamma_1 + 0.24\gamma_1 - 0.04\gamma_1 - 0.4\gamma_2 - 0.06\gamma_2 + 0.1\gamma_3) \qquad \ldots(4)$$

$$= 1.53\gamma_0 - 0.80\gamma_1 - 0.92\gamma_2 + 0.2\gamma_3$$

Вопрос для самоподготовки 12.10. Решите эти четыре уравнения, чтобы найти (a)автоковариационную функцию и (b)коэффициенты автокорреляции.

3.2 Смешанные процессы временного ряда

Некоторые временные ряды могут быть смоделированы с использованием смешанных рядов, в которых взаимосвязь между последовательными элементами включает в себя комбинацию более чем одного основного процесса временного ряда.

В заключении этой главы мы рассмотрим АРСС процессы, которые являются смешанными процессами, и АРиСС процессы, которые получаются из АРСС процессов.

Авторегрессионные процессы скользящего среднего

Авторегрессивный процесс скользящего среднего (АРСС)

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ — авторегрессивный процесс скользящего среднего (сокращенно АРСС(p,q)[1]), если этот временной ряд является суммой авторегрессивного процесса порядка p и процесса скользящего среднего порядка q, то есть:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} +$$

$$+Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

"АРСС(p,q) процесс является суммой АР(p) и СС(q) процессов"

Пример 12.8 Объясните, как следующие виды процессов могут считаться особыми случаями АРСС(p,q) процесса:

[1]обычно всегда используются P,Q

(a) АР(p) процесс

(b) СС(q) процесс

Решение

(a) АР(p) процесс является особым случаем АРСС(p,q) процесса при $q = 0$

(b) СС(q) процесс является особым случаем АРСС(p,q) процесса при $p = 0$

Авторегрессивные интегрированные процессы скользящего среднего

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ — авторегрессивный интегрированный процесс скользящего среднего порядка d (сокращенно АРИСС(p,d,q)), если разности d-го порядка $W_t = \nabla^d X_t$ формируют АРСС(p,q) процесс, то есть:

$$W_t = \alpha_1 W_{t-1} + \alpha_2 W_{t-2} + \ldots + \alpha_p W_{t-p} +$$

$$+ Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

"Разности порядка d АРИСС(p,d,q) процесса формируют АРСС(p,q) процесс"

Вопрос для самоподготовки 12.11. Объясните, как следующие виды процессов могут считаться особыми случаями АРИСС(p,q) процесса:

(a) чисто случайный процесс

(b) случайное блуждание

(c) процесс скользящего среднего

(d) авторегрессивный процесс

(e) авторегрессивный процесс скользящего среднего

§4 Краткое изложение

Временные ряды, встречающиеся в страховой деятельности, часто содержат аддитивные компоненты: направленная, периодическая, сезонная и случайная.

Дифференцирование значений отдельных временных рядов может создавать стационарные ряды. Это может быть сделано при помощи оператора обратной разности ∇, который взаимосвязан с оператором обратного сдвига B.

Временные ряды включают в себя следующие виды процессов:

- чисто случайный
- случайное блуждание
- скользящего среднего (СС)
- авторегрессивный (АР)
- авторегрессивный скользящего среднего (АРСС)
- авторегрессивный интегрированный скользящего среднего (АРИСС)

Особенности модели временных рядов характеризуются вычислением автоковариационной функции или автокорреляционной функции (АКФ). Эти функции можно оценить, исходя из реальных данных при помощи выборки коэффициентов автоковариации или коэффициентов автокорреляциации.

§5 Формулы

Компоненты аддитивного временного ряда

$$X_t = \text{Напр}_t + \text{Пер}_t + \text{Сез}_t + \text{Случ}_t$$

$$\text{Ряд} = \text{Направленная} + \text{Периодическая} + \text{Сезонная} + \text{Случайная}$$

Оператор обратной разности

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$$

$$\nabla^2 X_t = \nabla(\nabla X_t) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Оператор обратного сдвига

$$BX_t = X_{t-1}$$

$$B^2 X_t = B(BX_t) = X_{t-2}$$

Автоковариационная функция

$$\gamma(t_1, t_2) = cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = E[(X_{t_1} - E(X_{t_1}))(X_{t_2} - E(X_{t_2}))]$$

$$\gamma(k) = cov(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t+k} - E(X_{t+k}))] \text{ (стационарный процесс)}$$

Автокорреляционная функция

$$\rho(t_1,t_2)=\frac{cov(X_{t_1},X_{t_2})}{\sqrt{Var(X_{t_1})Var(X_{t_2})}}=\frac{\gamma(t_1,t_2)}{\sqrt{\gamma(t_1,t_1)\gamma(t_2,t_2)}}$$

$$\rho(k)=\frac{cov(X_t,X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}}=\frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}\ \text{(стационарный процесс)}$$

Выборочные коэффициенты автоковариации

$$c_k=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(x_t-\overline{x})(x_{t+k}-\overline{x})$$

Выборочные коэффициенты автокорреляции

$$r_k=\sum_{t=1}^{n-k}(x_t-\overline{x})(x_{t+k}-\overline{x})\bigg/\sum_{t=1}^{n}(x_t-\overline{x})^2=\frac{c_k}{c_0}$$

Чисто случайный процесс

$$X_t=Z_t\qquad\text{(среднее значение 0, дисперсия } \sigma^2\text{)}$$

Случайное блуждание

$$X_t=X_{t-1}+Z_t$$

Процесс скользящего среднего (СС)

$$X_t=Z_t+\beta_1Z_{t-1}+\ldots+\beta_qZ_{t-q}$$

Авторегрессивный процесс (АР)

$$X_t=\alpha_1X_{t-1}+\alpha_2X_{t-2}+\ldots+\alpha_pX_{t-p}+Z_t$$

Авторегрессивный процесс скользящего среднего (АРСС)

$$X_t=\alpha_1X_{t-1}+\alpha_2X_{t-2}+\ldots+\alpha_pX_{t-p}+$$
$$+Z_t+\beta_1Z_{t-1}+\ldots+\beta_qZ_{t-1}+Z_{t-q}$$

Авторегрессивный интегрированный процесс скользящего среднего (АРИСС)

$$W_t=\alpha_1W_{t-1}+\alpha_2W_{t-2}+\ldots+\alpha_pW_{t-p}+$$
$$+Z_t+\beta_1Z_{t-1}+\ldots+\beta_qZ_{t-1}+Z_{t-q}\qquad\text{где } W_t=\nabla^dX_t$$

§6 Вопросы студентам

В1 Почему модель аддитивных компонент не включает в себя дополнительные периоды величиной в 1 месяц или 1 неделю?

О1 Еженедельные и ежедневные периоды, несомненно, встречаются. Например, продажи в магазинах могут различаться в рабочие дни и выходные. Однако, вследствие очень короткой длительности этих периодов, их результаты составляют среднюю величину на очень короткий промежуток времени. Поэтому, включая эти дополнительные компоненты можно заметить небольшое различие результатов, полученных из моделей, используемых в экономике, страховании и других актуарных приложениях.

В2 Есть ли простой путь определить, что временной ряд является стационарным, непосредственно "взглянув на формулу"?

О2 Многие свойства временных рядов могут быть отняты использованием оператора обратного сдвига для представления временного ряда в терминах Z, и затем изучения свойств "полинома"для B. Это и есть тест на стационарность, но (обычно) он слишком сложный, чтобы делать его в уме.

В3 Я видел немного отличающееся определение выборки коэффициентов автокорреляции в другой книге. Почему так?

О3 Некоторые авторы включают множитель $(n-k)/n$ в знаменатель выборки коэффициентов автокорреляции. Это означает, что учитывается тот факт, что в числителе в сумме ровно $(n-k)$ слагаемых, тогда как в знаменателе в сумме ровно n слагаемых. В большинстве случаев значение n довольно большое, поэтому это корректирование создает небольшое отличие. Однако, вычисления, включающие в себя временные ряды, значительно проще когда это корректирование игнорируется. Другая незначительная проблема, связанная с выборкой коэффициентов автокорреляции, в том, что в определении используется общее среднее $\overline{x}$, даже если сумма в знаменателе не включает в себя все элементы ряда симметрично.

В4 Почему появилось название "случайные блуждания"?

О4 Одно из интуитивных описаний, используемых для представления этой модели, включает в себя пьяного, "блуждающего"вдоль прямой дороги, стараясь попасть домой из трактира. Делая шаг, пьяный или идет шатаясь несколько шагов вперед, или идет шатаясь несколько шагов назад. Другими словами местоположение пьяного после каждого шага определяется как случайное корректирование, примененное к местоположению до того, как шаг был сделан.

В5 Один мой приятель упомянул "Бокс-Дженкинс". Кто или что это такое?

О5 Бокс и Дженкинс — два исследователя, которые описали свойства временных рядов и разработали различные методы исследования временных рядов в 1970-х.

В6 Если оператор обратного сдвига может использоваться для выражения АР, АРСС и АРИСС моделей непосредственно в терминах Z, почему они изучаются как отдельные модели?

О6 Вы правы в том, что все эти модели могут быть выражены в терминах Z. Однако, ряд, который Вы получаете, если вы это делаете обыкновенно, включает в себя гораздо больше слагаемых (в действительности, обычно бесконечное количество). Практические задачи, включающие в себя временные ряды, часто включают в себя оценку параметров модели. Более трудно становится, когда модели выражаются в виде суммы величин Z, так как в этом случае больше коэффициентов для оценки.

В7 А как Вы собираетесь "подгонять"модели временных рядов к реальным, "жизненным"процессам?

О7 Для этого существует несколько способов. Составляющие стадии:

1. Выбираем соответствующую модель (например, АР, СС и т.д.). Решение часто приходит с пониманием механизмов, лежащих в основе процесса.

2. Определяем порядок процесса (то есть значения p, d и q). Для некоторых процессов (например, для СС процесса) вид коррелограммы (то есть графика выборочной автокорреляционной

функции) дает четкое указание на порядок процесса. В других случаях методы, плохо зарекомендовавшие себя на практике, могут требоваться, когда процессы последовательно высоких порядков испытываются до тех пор, пока не находят то, что дает приемлемое соответствие.

3. Оцениваем параметры (то есть коэффициенты). Это может быть сделано применением метода наименьших квадратов или метода приближения моментов.

Другой подход — это применить ряды Фурье для анализа спектра частот периодов, которые присутствуют в данных (то есть определить "мощности"циклов с различными периодами).

В8 Используются ли временные ряды для чего-нибудь еще, кроме прогнозирования?

О8 Прогнозирование — это главное назначение. Однако, временные ряды могут также применяться для мониторинга и контроля. Например, экономисты могут анализировать экономические показатели, такие как уровень безработицы, и советовать соответствующим министрам в правительстве, если это необходимо, сдерживать тенденцию, выявленную расчетами. Также временные ряды могут также применяться для анализа основных механизмов, действующих в реальных процессах. Например, эпидемиологи, изучающие распространение СПИДа, могут рассматривать факторы, влияющие на темпы возникновения новых случаев различными способами распространения (например, незащищенный секс, использование внутривенных наркотиков, загрязнённые кровью продукты, от матери к ребенку).

6.1 Подсказки для ответов на вопросы

1. Важно четко понимать разницу между различными процессами и их математическими описаниями.

2. Z обычно нормализованы таким образом, что коэффициент Z_t в определениях АР, СС и АРСС процессах равняется 1.

§7 Ответы на вопросы для самоподготовки

Решение 12.1

Здесь может быть несколько возможных ответов:

(a) количество людей, погибших в результате несчастных случаев на дороге в Великобритании за последние месяцы

направленная безопасность транспортных средств (↓), улучшение дорог (↓), интенсивное движение на дорогах (↑)

периодическая угоны машин ради баловства, полицейские операции за безопасность (например, против управления автомобилем в состоянии опьянения), изменения ограничений скорости

сезонная плохая погода и темнота служат причиной многих аварий зимой.

случайная изменения условий движения, аварии на автомагистралях.

(b) количество страховых полисов для путешествующих, продаваемые каждую неделю

направленная многие люди могут позволить себе путешествовать в связи с улучшением уровня жизни (↑)

периодическая путешествия ограничивают/отменяют в периоды политических волнений

сезонная большинство людей путешествуют в период отпусков, например, летом, на Рождество

случайная изменения дат отпусков

(c) количество детей, родившихся в Великобритании за последние месяцы

направленная увеличение применения методов контрацепции (↓), размеры семьи уменьшаются в связи с уровнем улучшения жизни (↓)

периодическая изменение "модного"размера семьи

сезонная многие дети рождаются в летние месяцы

случайная изменение дат зачатия и периодов беременности

(d) количество краж в домах, сообщаемых каждый день

направленная увеличение технологий безопасности (↓), увеличение криминальный технологий (↑)

периодическая уровень преступности возрастает в периоды экономического спада

сезонная грабители остаются дома в плохую погоду

случайная преступления конъюнктурщиков, задержки отчетности

(e) население мира за каждый год, начиная с 1500 года

направленная основное увеличение уровня рождаемости опережает уровень смертности (↑)

периодическая возникновение новых болезней, войн

сезонная (не может быть не включена в ежегодные данные)

случайная эпидемии, голод, стихийные бедствия, погрешности оценки

Решение 12.2

Если мы возьмем $n = 12$ и $t_1 = Jan$, $t_2 = Feb, \ldots$ и пусть k принимает последовательные значения 1,2,3,...,12. Из определения стационарности следует, что совместное распределение величин за январь-декабрь такое же, как и совместное распределение величин за январь-февраль и т.д. Поэтому совместное распределение за 12 последовательных месяцев такое же, независимо от того, с какого месяца мы начинаем, то есть сезонность отсутствует.

Решение 12.3

Разность второго порядка:

$$\nabla^2 X_t = \nabla(\nabla X_t) = \nabla(X_t - X_{t-1}) = (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Другим способом, используя символичное соотношение $\nabla = 1 - B$, получаем:

$$\nabla^2 X_t = (1 - B)^2 X_t = (1 - 2B + B^2) X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Решение 12.4

[a] Разности первого порядка: $W_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-1}$

Перегруппируем, получим: $X_t = X_{t-1} + W_t$

[b] Разности второго порядка: $W_t = \nabla^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

Перегруппируем, получим: $X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + W_t$

Решение 12.5

Мы будем предполагать найти следующие корреляции:

- довольно сильную положительную корреляцию температур соседних месяцев (то есть величин, разделенных 1 или 2 месяцами)
- очень сильную положительную корреляцию температур одинаковых месяцев в разные годы (то есть величин, разделенных 12 месяцами, 24 месяцами и т.д.), хотя она может уменьшаться со временем, если имеется цикл с длительным периодом, влияющий на погоду
- сильную отрицательную корреляцию температур в противоположные времена года (то есть величин, разделенных 5, 6 или 7 месяцами)

Поэтому автокорреляционная функция может выглядеть следующим образом:

Решение 12.6

Выборочное среднее:

$$\overline{x} = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12} x_t = \frac{36}{12} = 3$$

Вычитая это из значений ряда, получаем:

$$1, 2, 3, 0, 0, -2, -3, -2, 0, -1, 0, 2$$

Применим формулу $c_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n-k}(x_t - \overline{x})(x_{t+k} - \overline{x})$ для вычисления коэффициентов автокорреляциации:

$$c_0 = \frac{1}{12}[(1)(1) + (2)(2) + (3)(3) + \ldots + (2)(2)] = \frac{36}{12} = 3$$

$$c_1 = \frac{1}{12}[(1)(2) + (2)(3) + (3)(0) + \ldots + (0)(2)] = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$c_2 = \frac{1}{12}[(1)(3) + (2)(0) + (3)(0) + \ldots + (-1)(2)] = \frac{7}{12}$$

$$c_6 = \frac{1}{12}[(1)(-3) + (2)(-2) + (3)(0) + \ldots + (-2)(2)] = -\frac{11}{12}$$

Поэтому коэффициенты автокорреляциации:

интервал 1 месяц: $r_1 = c_1/c_0 = 5/9 = 0.556$

интервал 2 месяца: $r_2 = c_2/c_0 = 7/36 = 0.194$

интервал 6 месяцев: $r_6 = c_6/c_0 = -11/36 = -0.306$

Коэффициенты показывают, что значения последовательных месяцев схожи ($r_1 = 0.556$), но эта взаимосвязь уменьшается, когда интервал увеличивается (например, $r_2 = 0.194$), и превращается в обратную зависимость ($r_6 = -0.306$) для месяцев из противоположных частей года.

Решение 12.7

Так как вариация X_t зависит от фактического времени t (потому что по формуле $Var(X_t) = t\sigma^2$), то исходный ряд X_t не может быть стационарным.

По определению разностями являются $X_t - X_{t-1} = Z_t$. Так как Z_t являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами, то они формируют стационарный процесс.

Решение 12.8

Элементами автоковариационной функции $Cov(X_t, X_{t+k})$ являются:

$$X_t = \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

$$\text{и} \qquad X_{t+k} = \beta_0 Z_{t+k} + \beta_1 Z_{t+k-1} + \ldots + \beta_q Z_{t+k-q}$$

Если $k > q$, тогда $t + k - q > t$. Поэтому последнее слагаемое в X_{t+k} следует за первым слагаемым в X_t, то есть слагаемые в X_t и X_{t+k} не совпадают.

Поэтому X_t и X_{t+k} независимы, и автоковариационная функция равняется нулю.

Решение 12.9

Это может быть сделано, если выразить X_t непосредственно в терминах Z.

Процесс задается как $X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t$. Перегруппируем это определение, получим:

$$Z_t = X_t - \alpha X_{t-1} = X_t - \alpha B X_t = (1 - \alpha B) X_t$$

Преобразуем и разложим в ряд (предполагая, что $|\alpha| < 1$), получим:

$$X_t = (1 - \alpha B)^{-1} Z_t = (1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \ldots) Z_t = Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \ldots$$

Так как Z являются независимыми со средним значением ноль и дисперсией σ^2, то:

$$E(X_t) = E(Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \ldots) = 0$$

$$Var(X_t) = Var(Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \ldots) = (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots)\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}$$

Решение 12.10

(a) Из уравнения (1), мы получаем:

$$0.1\gamma_2 = 0.6\gamma_0 - 0.6\gamma_1$$

$$\text{то есть } \gamma_2 = 6\gamma_0 - 6\gamma_1$$

Из уравнения (2) получаем:

$$\gamma_2 = 0.4\gamma_0 + 0.5\gamma_1$$

Исключая γ_2 из этих двух уравнений, получаем $\gamma_1 = \frac{5.6}{6.5}\gamma_0 = \frac{56}{65}\gamma_0$. Подставляя обратно, получаем $\gamma_1 = \frac{54}{65}\gamma_0$. Используя уравнения (3) и (4), мы получим, что:

$$\gamma_3 = 0.6 \times \frac{54}{65}\gamma_0 + 0.4 \times \frac{56}{65}\gamma_0 - 0.1\gamma_0 = \frac{483}{650}\gamma_0$$

$$\sigma^2 = 1.53\gamma_0 - 0.8 \times \frac{56}{65}\gamma_0 - 0.92 \times \frac{54}{65}\gamma_0 + 0.2 \times \frac{483}{650}\gamma_0 = 0.22508\gamma_0$$

Поэтому значения автоковариаций:

$$\gamma_0 = 4.4429\sigma^2$$

$$\gamma_1 = 3.8278\sigma^2$$

$$\gamma_2 = 3.6911\sigma^2$$

$$\gamma_3 = 3.3014\sigma^2$$

(b) Разделим на γ_0, получаем коэффициенты автокорреляциации:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = 0.862$$

$$\rho_2 = 0.831$$

$$\rho_3 = 0.743$$

Решение 12.11

(a) Чисто случайный процесс: АРИСС(0,0,0)

(b) Случайное блуждание: АРИСС(1,0,0) при $\alpha_1 = 1$ или АРИСС(0,1,0)

(c) Процесс скользящего среднего: СС(q) = АРИСС(0,0,q)

(d) Авторегрессивный процесс: АР(p) = АРИСС(p,0,0)

(e) Авторегрессивный процесс скользящего среднего: АРСС(p,q) = АРИСС(p,0,q)