Глава 8

Вероятность разорения

Цели главы

После изучения этой главы вы сможете:

- описать модель развития суммарного иска
- находить и использовать коэффициент поправки, узнаете его свойства
- вычислять вероятность разорения в простых случаях, включая случаи с перестрахованием

§1 Введение

В последней главе мы использовали модель коллективного иска, чтобы рассмотреть суммарный иск S, возникший в течение фиксированного периода времени. S задается равенством $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, где N означает количество исков, произошедших за данный период.

В этой главе мы расширим нашу модель, рассматривая $S(t)$ как функцию времени. Тогда получаем равенство $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}$, где $N(t)$ означает количество исков, случившихся до момента времени t. Мы можем использовать эту модель, зависящую от времени, чтобы описать количество наличных средств страховщика и определить особенности вероятности разорения в коротком и долгосрочном периодах.

Теория этой главы очень . В особенности обратите внимание на раздел о результате изменения значений параметров и на раздел о перестраховании.

§2 Развитие суммарного иска, непрерывная и дискретная по времени модели

В данной главе рассматривается изменение величины фонда собственных средств в зависимости от изменения величины суммарного иска.

Мы будем рассматривать две модели, описываемых зависимостью страховых исков от времени. В непрерывной модели ситуация описывается непрерывно. В дискретной модели ситуация описывается исключительно интервалами времени.

Развитие суммарного иска в случае непрерывной модели математически может быть сформулировано следующим образом:

2.1 Развитие суммарного иска (непрерывная по времени модель)

Развитие суммарного иска определяется уравнением:

$$U(t) = u + ct - S(t), \qquad t \geqslant 0$$

Где $U(t)$ – это фонд собственных средств страховщика в момент времени t

u – это начальный фонд собственных средств в момент времени $t = 0$

c – это норма притока (нетто) премий, считается, что премии поступают постоянно

$S(t)$ – это суммарный иск к моменту времени t

Премии и иски считаются нетто,т.е. без учета издержек и премий перестрахования.

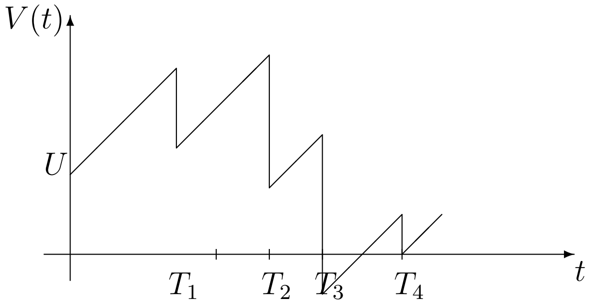
Модель игнорирует проценты на фонд собственных средств.

Пример 8.1 Дайте логическое обоснование уравнению, определяющему развитие суммарного иска.

Решение Фонд собственных средств страховщика $U(t)$ представляет собой нетто наличные средства в момент времени t. Начальный фонд собственных средств обозначен через u, премии поступают постоянно размера c, что означает, что общий доход за период времени t равняется $u+ct$. $S(t)$ обозначает суммарный иск, оплаченный к моменту времени t. Таким образом фонд собственных средств страховщика в момент времени t равняется разности между общим доходом и общим расходом, т.е. $u + ct - S(t)$

Для непрерывной модели $U(t)$ имеет, как показано ниже, пиловидный график, где фонд собственных средств монотонно возрастает , но резко падает каждый раз, когда возникает иск.

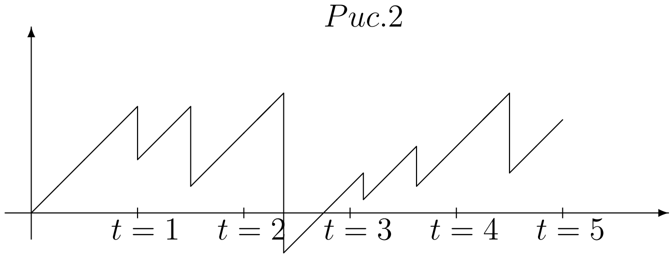
*Рис.*1



Мы будем интересоваться вычислением вероятности разорения, то есть вероятностью того, что фонд собственных средств упадет ниже нуля. В данном случае страховщик разоряется в момент времени 3.

В соответствующей дискретной модели графика (используются равные интервалы в 1 единицу) разорение не наблюдается в течение наблюдаемого периода[1], поэтому мы не отмечаем, что происходит между точками времени.

*Рис.*2



Вопрос для самоподготовки 8.1. Найдите значения u и c для развития иска, изображеного на непрерывном графике, и проверьте то, что соотношение выполняется при $t = 5$.

§3 Вероятности разорения

В этом параграфе определяется вероятность разорения в бесконечном/конечном и непрерывном/дискретном случаях, формулируется и

[1]Фонд собственных средств падает ниже нуля до того, как страховщик понимает, что он разорен.

объясняется взаимосвязь между различными вероятностями разорения.

Мы будем интересоваться определением вероятности разорения для непрерывной и дискретной модели в случаях конечного и бесконечного времени. Различные вероятности разорения, которые обозначаются ψ (произносится "psi") определяются следующим образом:

3.1 Вероятности разорения (непрерывная модель)

Вероятность разорения в случае конечного времени $\psi(u, t_0)$- это вероятность того, что фонд собственных средств упадет ниже нуля в какой-то момент времени до t_0, при начальном капитале u:

$$\psi(u, t_0) = P[U(t) < 0 \text{ при некотором } t \leqslant t_0]$$

Вероятность разорения в случае бесконечного времени $\psi(u, t_0)$- это вероятность того, что фонд собственных средств упадет ниже нуля в какой-то момент времени при начальном фонде собственных средств u:

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \text{ при некотором } t]$$

3.2 Вероятности разорения (дискретная модель)

Вероятность разорения в случае конечного времени $\psi_h(u, t_0)$- это вероятность того, что фонд собственных средств упадет ниже нуля в какой-то момент времени до t_0, при начальном фонде собственных средств u, и когда используются временные интервалы в h единиц:

$$\psi_h(u, t_0) = P[U(t) < 0 \text{ при некотором } t = h, 2h, 3h, \ldots \text{ и } t \leqslant t_0]$$

Вероятность разорения в случае бесконечного времени $\psi_h(u, t_0)$- это вероятность того, что фонд собственных средств упадет ниже нуля в какой-то момент времени до t_0, при начальном капитале u, и когда используются временные интервалы в h единиц:

$$\psi_h(u) = P[U(t) < 0 \text{ при некотором } t = h, 2h, 3h, \ldots]$$

§4 Взаимосвязь между вероятностями разорения

Вероятности разорения для непрерывной и дискретной модели в случаях конечного и бесконечного времени связаны следующими неравенствами и соотношениями:

Взаимосвязь между вероятностями разорения (непрерывный/дискретный случай)

Расширим рассматриваемый промежуток времени ($0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < \infty$):

$$\psi(u,t_1) \leqslant \psi(u,t_2) \leqslant \psi(u) \qquad \psi_h(u,t_1) \leqslant \psi_h(u,t_2) \leqslant \psi_h(u)$$

$$\lim_{t\to\infty} \psi(u,t) = \psi(u)$$

Расширим начальный фонд собственных средств ($0 \leqslant u_1 \leqslant u_2$):

$$\psi(u_2,t) \leqslant \psi(u_1,t) \qquad \psi_h(u_2,t) \leqslant \psi_h(u_1,t)$$

$$\psi(u_2) \leqslant \psi(u_1) \qquad \psi_h(u_2) \leqslant \psi_h(u_1)$$

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u,t) = 0$$

Разделим на интервалы времени (n=1,2,3,...):

$$\psi_{h/n}(u,t) \geqslant \psi_h(u,t)$$

$$\psi_{h/n}(u) \geqslant \psi_h(u)$$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{h/n}(u,t) = \psi(u,t)$$

Доказательство

Все эти соотношения соответствуют общему смыслу:

- Увеличивая длину рассматриваемого периода, увеличивается возможность того, что случится разорение
- Чем больше значение начального фонда собственных средств, тем больше требуется убытков, чтобы произошло разорение
- Уменьшая интервалы времени для дискретной модели увеличивается возможность того, что разорение будет наблюдаться между точками времени

4.1 Вероятность разорения в коротком периоде

Если мы знаем распределение суммарного иска $S(t)$, то часто мы можем сразу определить вероятность разорения для дискретной модели в случае конечного времени (без ссылки на модели), рассматривая используемые наличные средства.

Пример 8.2 Предполагается, что суммарный иск, полученный в течение каждого года от отдельных видов годичных страховых полисов, имеет нормальное распределение со средним значением $0.7P$ и средним отклонением $2.0P$, где P это премии за год. Считается, что иски возникают независимо. Страховщики хотят оценить свою платежеспособность в конце каждого года.

Мелкий страховщик с начальным фондом собственных средств 0.1 миллиона £предполагает по определенному виду страхования продать 100 полисов в начале следующего года, годовая премия по каждому из этих рисков составляет 5000£. Страховщик терпит издержки в $0.2P$ на оформление каждого полиса. Вычислите вероятность того, что страховщик окажется неплатежеспособным к концу следующего года. Не учитывайте проценты на фонд собственных средств.

Решение Используя условие получаем, что фонд собственных средств страховщика к концу следующего года будет равняться:

$$
\begin{aligned}
U_1 = {} & \text{ начальный фонд собственных средств} + \text{премии} - \text{издержки} - \text{убытки} \\
& = 0.1m + 100 \times 5000 - 100 \times 0.2 \times 5000 - S(1) \\
& = 0.5m - S(1)
\end{aligned}
$$

Распределение $S(1)$ является:

$$S(1) \sim N(100 \times 0.7 \times 5000, 100 \times (2.0 \times 5000)^2) = N(0.35m, (0.1m)^2)$$

Следовательно вероятность того, что значение фонда собственных средств будет меньше нуля:

$$
\begin{aligned}
P[U(1) < 0] &= P[S(1) > 0.5m] \\
&= P[N(0.35m, (0.1m)^2) > 0.5m] \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{0.5m - 0.35m}{0.1m}\right) \\
&= 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.93319 = 0.067
\end{aligned}
$$

Следовательно искомая вероятность равняется 6.7%

Вопрос для самоподготовки 8.2. Если страховщик предполагает продать 200 полисов в течение второго года за те же премии и ожидает такую же ставку издержек, то вычислите вероятность того, что страховщик окажется неплатежеспособным к концу второго года.

§5 Модели Пуассона

В непрерывной модели мы предположим, что иски случаются согласно предположениям модели Пуассона. Это отдельное приложение моделей коллективного риска, которые мы изучали в предыдущей главе.

В этом параграфе определяется пуассоновский процесс, получают распределение числа событий на заданном интервале, выводят распределение времени между событиями и применяют полученные результаты.

Мы предполагаем, что количество предъявленных исков соответствует пуассоновскому процессу.

Пуассоновский процесс

Общее число событий $N(t)$ на временном интервале $(0,t)$ имеет вид пуассоновского процесса, если:

- Вероятность того, что в течение какого-то короткого промежутка времени $(t,t+h)$ произойдет одно событие, равняется λh

  то есть $P[$ В точности 1 событие на $(t,t+h)] = \lambda h + o(h)$[2]

- Вероятность того, что в течение этого интервала произойдет более 1 события, незначительна в сравнении с вероятностью одного события

  то есть $P[$ Более 1 события на $(t,t+h)] = o(h)$

- События в разные временные интервалы случаются независимо.

Пример 8.3 Объясните, как иски автомобильного страхования могут быть представлены пуассоновским процессом.

Решение В данном случае событиями являются случившиеся иски (то есть несчастные случаи, пожары, кражи) или иски, сообщенные страховщику. Параметр λ означает среднюю норму случившихся исков (например 50 в день). Предположение, что на достаточно коротком интервале времени может случиться не более одного иска, выполняется, если мы предполагаем, что события, повлекшие за собой иск не могут привести к многократным искам (то есть не рассматриваются аварии на автомагистралях и т.д.).

Число событий за данный период времени

Для пуассоновского процесса с параметром λ число событий $N(t)$, произошедших на интервале $(0,t)$ имеет $Poisson(\lambda t)$ распределение, то есть вероятность того, что произошло точно x событий:

$$P[N(t)=x] = p_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \qquad (x = 0,1,2,\ldots)$$

[2]Обозначение $o(h)$ означает величину "меньшего порядка, чем λh то есть эта величина при h стремящемся к нулю стремится к нулю быстрее, чем λh.

"Число исков имеет пуассоновское распределение с параметром, равным ожидаемому числу исков"

Доказательство

В течение небольшого интервала времени $(t, t+h)$ может быть либо ровно одно событие (с вероятностью $\lambda h + o(h)$), либо ни одного события (с вероятностью $1 - \lambda h + o(h)$). Это приводит нас к следующему набору равенств, связывающих число событий, произошедших к моменту времени $t+h$, с числом событий, произошедших к моменту времени t:

$$p_0(t+h) = (1 - \lambda h + o(h))p_0(t)$$

$$p_1(t+h) = (\lambda h + o(h))p_0(t) + (1 - \lambda h + o(h))p_1(t)$$
$$p_2(t+h) = (\lambda h + o(h))p_1(t) + (1 - \lambda h + o(h))p_2(t)$$

и т.д.

Перенесем слагаемые, которые не содержат h, из правой части уравнения, в левую и поделим на h, получаем:

$$[p_0(t+h) - p_0(t)]/h = -\lambda p_0(t) + o(t)$$

$$[p_1(t+h) - p_1(t)]/h = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) + o(1)$$
$$[p_2(t+h) - p_1(2)]/h = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t) + o(1)$$

и т.д.

Устремляем $h \to 0$, получаем:

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$$

$$p_1'(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t)$$
$$p_2'(t) = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t)$$

и т.д.

Эти дифференциальные уравнения можно решить, используя различные математические методы (смотри вопрос для самоподготовки 8.4 в конце этого параграфа), и тогда получаем:

$$p_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Мы также можем найти распределение времени между последовательно произошедшими событиями:

Время между событиями

Для пуассоновского процесса с параметром λ время между событиями T, то есть время до наступления следующего события, имеет $Exp(\lambda)$ распределение, то есть его функция плотности распределения равняется:

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t > 0)$$

Доказательство

Так как вероятность того, что ожидаемое время превысит t, это есть вероятность того, что в течение интервала времени $(0, t)$ не произойдет ни одного события, функция распределения ожидаемого времени равняется:

$$F_T(t) = P(T \leqslant t) = 1 - P(T > t) = 1 - P[N(t) = 0] = 1 - e^{-\lambda t}$$

Дифференцируя, получаем функцию плотности распределения:

$$f_T(t) = F_T'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t > 0)$$

которая является функцией плотности $Exp(\lambda)$ распределения.

Заметим, что время между событиями не зависит от общего времени. Другими словами время до наступления следующего события имеет такое же распределение, независимо от времени последнего события или числа событий, которые уже произошли. Это опирается на отсутствие последействия экспоненциального распределения.

Вопрос для самоподготовки 8.3. Если предъявленные иски описываются пуассоновским процессом с параметром 5 в день (и страхователь имеет круглосуточную телефонную "горячую линию"), то вычислите:

1. вероятность того, что будет сообщено менее чем о двух исках в день
2. вероятность того, что ещё об одном иске будет сообщено в течение следующего часа.

Вопрос для самоподготовки 8.4. Решите дифференциальные уравнения, используемые при выведении распределения числа событий.

5.1 Обобщенные пуассоновские процессы

В этом параграфе определяется обобщенный пуассоновский процесс и получают моменты и производящую функцию моментов для этого процесса.

Предположим, что величина предъявленных исков соответствует обобщенному пуассоновскому процессу.

Обобщенный пуассоновский процесс

Общая сумма иска $S(t)$ за интервал времени $(0, t)$ соответствует обобщенному пуассоновскому процессу, если:

- Иски случаются в соответствии с пуассоновским процессом.
- Величины индивидуальных исков X независимы и одинаково распределены.
- Величины индивидуальных исков X не зависят от числа исков $N(t)$

Мы можем использовать формулу производящей функции моментов для модели коллективного риска, чтобы получить производящую функцию моментов суммарного иска за данный период времени:

5.2 Производящая функция моментов обобщенного пуассоновского процесса

Если иски случаются в соответствии с обобщенным пуассоновским процессом с параметром λ и производящая функция моментов индивидуальных исков есть $M_X(u)$[3], тогда производящая функция моментов для $S(t)$ будет:

$$M_{S(t)}(u) = e^{\lambda t[M_X(u)-1]}$$

Доказательство

Суммарный иск может быть представлен в терминах модели коллективного иска как:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)}$$

Это случайная сумма независимых и одинаково распределеных случайных величин(X_i) и $N(t)$ имеет пуассоновское распределение со средним

[3]Мы будем использовать u в качестве фиктивной переменной производящей функции моментов в этом параграфе, чтобы избегать путаницы с t.

значением λt. Поэтому $S(t)$ имеет обобщенное пуассоновское распределение, и формула производящей функции моментов сложного распределения дает:

$$M_{S(t)}(u) = M_{N(t)}[\log M_X(u)] = e^{\lambda t[e^{\log M_X(u)}-1]} = e^{\lambda t[M_X(u)-1]}$$

Пример 8.4 Если иски случаются в соответствии с обобщенным пуассоновским процессом с параметром μ и величины индивидуальных исков имеют $Gamma(\alpha, \lambda)$ распределение, найдите выражение для производящей функции моментов суммарного иска $S(t)$ на интервале $(0, t)$.

Решение Используя формулу для производящей функции моментов для $S(t)$ (и учитывая, что λ имеет теперь особое значение):

$$M_{S(t)}(u) = e^{\mu t[M_X(u)-1]} = e^{\mu t[(1-u/\lambda)^{-\alpha}-1]}$$

Мы также можем использовать свойства обобщенных распределений, выведенные раньше, чтобы получить формулу для моментов величины суммарного иска:

Среднее значение и дисперсия величины суммарного иска

Для обобщенных пуассоновского процесса $S(t)$ среднее значение и дисперсия величины суммарного иска равняется:

$$E[S(t)] = \lambda t E[X] \qquad Var[S(t)] = \lambda t E[X^2]$$

Доказательство

Эти результаты непосредственно следуют из формулы моментов обобщенного пуассоновского распределения.

Вопрос для самоподготовки 8.5. Проверьте, что непосредственно из производящей функции моментов эти формулы верны для предыдущего примера.

§6 Вероятность разорения для долгосрочного периода.

В этом параграфе определяется коэффициент поправки для обобщенного пуассоновского процесса, показывает, что он существует, его вычисляют в простых случаях и получают простые ограничения и оценки.

6.1 Коэффициент поправки

Вычисления вероятностей разорения для обобщенного пуассоновского процесса включает в себя величину, называемую коэффициентом поправки. Коэффициент поправки может использоваться для вычисления вероятности окончательного разорения в отдельных случаях или для установления границ оценок в более сложных ситуациях.

Коэффициент поправки

Коэффициент поправки r для обобщенного пуассоновского процесса это наименьшее положительное решение уравнения:

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r)$$

где

λ- это частота исков, то есть норма происшествия исков.

c- это текущая ставка притока премий (включая поправки на безопасную нагрузку и перестрахование).

$M_X(r)$- это производящая функция моментов величин текущих индивидуальных распределенных исков X, принимающая значения при $t = r$, то есть $E(e^{rX})$ (включая поправки на перестрахование).

Часто безопасная нагрузка включается в текущие премии, чтобы прибыли и издержки обеспечивали повышенную сохранность.

Пример 8.5 Покажите, что если текущая премия составляет премию за риск с относительной безопасной нагрузкой θ, тогда коэффициент поправки удовлетворяет: $1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r)$

Решение Премия за риск:

$$\text{частота исков} \times \text{средняя величина иска} = \lambda E(X)$$

С относительной безопасной нагрузкой θ ставка текущего годового дохода премий будет:

$$c = (1+\theta)\lambda E(X)$$

Уравнение коэффициента поправки $\lambda + cr = \lambda M_X(r)$ будет:

$$\lambda + (1+\theta)\lambda E(X)r = \lambda M_X(r)$$

Сократив на λ, получим:

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r)$$

Вопрос для самоподготовки 8.6. Покажите, что $r = 0$ всегда является тривиальным решением уравнения коэффициента поправки.

Мы часто можем использовать тот факт, что $r = 0$ всегда является тривиальным решением, для упрощения вычислений, включенных в решение уравнения коэффициента поправки.

Пример 8.6 Выведите формулу для коэффициента поправки, если иски случаются согласно обобщенному пуассоновскому процессу с параметром λ и величины индивидуальных исков X имеют $Exp(\beta)$ распределение, и офисная премия равняется премии за риск плюс безопасная нагрузка θ. Не учитывайте перестрахование.

Решение Коэффициент поправки удовлетворяет: $1+(1+\theta)E(X)r = M_X(r)$

Так как величины индивидуальных исков X имеют $Exp(\beta)$ распределение:

$$E(X) = \frac{1}{\beta} \qquad \text{и} \qquad M_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t} \text{ (которое выполняется при } t < \beta)$$

Поэтому уравнение коэффициента поправки будет:

$$1 + (1+\theta)\frac{1}{\beta}r = \frac{\beta}{\beta - r}$$

Умножая на $\beta(\beta - r)$, получаем:

$$\beta(\beta - r) + (1+\theta)(\beta - r)r = \beta^2$$

Сократив обе части уравнения на β^2, получаем:

$$-\beta r + (1+\theta)(\beta - r)r = 0$$

Поделим на r (которое соответствует тривиальному решению $r = 0$) получаем:

$$\beta + (1+\theta)(\beta - r) = 0$$

Выразим r:

$$r = \beta - \frac{\beta}{1+\theta} = \beta\left(1 - \frac{1}{1+\theta}\right) = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$$

Вопрос для самоподготовки 8.7. Напишите уравнение коэффициента поправки для исков личного страхования от несчастных случаев, если 90% исков в 10000£и 10% исков в 25000£, относительную безопасную нагрузку возьмите в 20%.

Покажите, что это уравнение имеет решение в интервале:

$$0.00002599 < r < 0.00002601$$

6.2 Существование коэффициента поправки

Так как мы не учитываем проценты, то страховая компания может оставаться в бизнесе в долгосрочном периоде, если ставка текущей премии больше, чем ставка премии за риск, то есть средней стоимости исков. Согласно этому предположению коэффициент поправки ненулевой и определен единственным образом.

Существование коэффициента поправки

Если производящая функция моментов величин индивидуальных исков $M_X(r)$ определена при $r < \gamma$, где γ это положительная константа и ставка текущей премии больше, чем ставка премии за риск (то есть $c > \lambda E(X)$), тогда существует единственное значение r, которое удовлетворяет уравнению коэффициента поправки $\lambda + cr = \lambda M_X(r)$ при $0 < r < \gamma$.

Если производящая функция моментов определена при некоторых положительных значениях, то коэффициент поправки единственен

Доказательство использует график, приведенный ниже.

Доказательство

Когда мы изучали производящие функции моментов, мы рассматривали, что производящая функция моментов $M_X(r)$ (и, следовательно, уравнение коэффициента поправки) определена при $r < \gamma$, где γ это положительная константа (которая может быть $+\infty$).

Доказательство осуществляется демонстрацией того, что график функции $g(r) = \lambda M_X(r) - \lambda - cr$ (то есть разность правой и левой части уравнения коэффициента поправки) имеет следующие свойства:

- (a)начинается в точке (0,0) с отрицательным наклоном
- (b)стремится к ∞ при r стремящемся к γ
- (c)его наклон всегда возрастает, поэтому может быть только один экстремум

Поэтому график пересекает ось x только один раз при $r < \gamma$, то есть существует ровно одно решение уравнения коэффициента поправки.

Доказательство осуществляется следующим образом:

- (a) Так как $r = 0$ всегда является решением уравнения коэффициента поправки:

$$g(0) = 0$$

Первая производная функции $g(r)$ будет: $g'(r) = \lambda M_X'(r) - c$

Следовательно: $g'(0) = \lambda E(X) - c < 0$

- (b) Мы должны показать, что:

$$\lim_{r \to \gamma} g(r) = +\infty$$

Если $\gamma < \infty$ (то естьγ конечное),то это непосредственно следует из того, что $M_X(\gamma) = +\infty$ и все остальные элементы в уравнении для $g(r)$ остаются конечными.

Если $\gamma = \infty$, то мы можем использовать тот факт, что $E(e^{rX})$ должно быть больше любых других элементов в разложении $1+rE(X)+1/2r^2E(X^2)+\ldots$ (так как r и X оба положительные). Используя квадрат элемента, получаем:

$$g(r) = \lambda E(e^r X) - \lambda - cr > \lambda \frac{r^2}{2} E(X^2) - \lambda - cr$$

При r стремящемся к ∞, первое слагаемое правой части, которое является квадратным относительно r с положительным коэффициентом, будет превосходить другие два слагаемые, которые являются линейными функциями r. Поэтому $g(r)$ будет стремиться к $+\infty$.

- (c) Вторая производная функции $g(r)$ будет:

$$g''(r) = \lambda M_X''(r) = \lambda E(X^2 e^{rX}) > 0$$

так как элементы математического ожидания положительны. Это означает, что наклон графика всегда возрастает.

6.3 Верхняя граница коэффициента поправки

В большинстве случаев невозможно непосредственно решить уравнение коэффициента поправки. Поэтому применяются численные методы. Начальная оценка для значения может быть найдена из следующего неравенства.

Верхняя граница коэффициента поправки.

Коэффициент поправки удовлетворяет неравенству:

$$r < \frac{2[c/\lambda - E(X)]}{E(X^2)}$$

Доказательство

Уравнение коэффициента поправки есть: $\lambda + cr = \lambda M_X(r)$
Преобразуя правую часть, получаем:

$$\lambda + cr = \lambda E(e^{rX}) = \lambda[1 + rE(X) + \frac{r^2}{2}E(X^2) + \ldots]$$

Так как величины индивидуальных исков X принимают положительные значения, то слагаемые правой части положительны. Поэтому, пренебрегая слагаемыми, степень которых выше X^2, получаем:

$$\lambda + cr > \lambda[1 + rE(X) + \frac{r^2}{2}E(X^2)]$$

Сократив на λ с каждой стороны:

$$cr > \lambda[rE(X) + \frac{r^2}{2}E(X^2)]$$

Разделив на r (которое должно быть положительным):

$$c > \lambda[E(X) + \frac{r}{2}E(X^2)]$$

Преобразуем, чтобы получить неравенство для r:

$$r < \frac{2[c/\lambda - E(X)]}{E(X^2)}$$

Вопрос для самоподготовки 8.8. Найдите верхнюю границу для коэффициента поправки в предыдущем примере.

Заметим, что согласно определенным обстоятельствам, мы также можем найти нижнюю границу для коэффициента поправки. Смотри параграф 3.2 Основной Лекции для дополнительных подробностей.

6.4 Неравенство Лундберга

Здесь выводится неравенство Лундберга для обобщенного пуассоновского процесса и объясняется смысл коэффициента поправки.

Одним очень полезным результатом является неравенство Лундберга.
Неравенство Лундберга

Неравенство Лундберга [4] формулируется следующим образом:

$$\psi(u) \leqslant e^{-ru}$$

Объяснение

Неравенство Лундберга следует из точной формулы, которая была получена для вероятности окончательного разорения для обобщенного пуассоновского процесса, которая формулируется так:

$$\psi(u) = \frac{e^{-ru}}{E[e^{-ru(T)} \mid T < \infty]}$$

В этой формуле T обозначает время, когда наступает разорение (если это когда либо случается) и $u(t)$ обозначает величину дефицита непосредственно после того, как случился иск, приведший к разорению.

Так как дефицит $u(T)$ должен быть отрицательный, $-ru(T)$ должно быть положительной величиной и $e^{-ru(T)}$ должно быть больше 1. Поэтому условное математическое ожидание в знаменателе также должно быть больше 1, и получается неравенство Лундберга.

Дифференцирование неравенства Лундберга приводится в **Приложении**

В большинстве случаев знаменатель очень близок к 1, поэтому знак неравенства близок к знаку равенства, то есть $\psi(u)$ совсем ненамного меньше e^{-ru}.

Это значит, что e^{-ru} дает хорошую оценку для $\psi(u)$.

6.5 Взаимосвязь коэффициента поправки и вероятности разорения

$$\psi(u) = e^{-ru}$$

"При увеличении коэффициента поправки, уменьшается вероятность разорения"

Пример 8.7 Начертите график вероятности окончательного разорения $\psi(u)$, как функцию начального фонда собственных средств u, для ситуации из примера 4.6, дано, что: $\beta = 0.001$ в единицах $£^{-1}$ и $\theta = 0.2$

[4] Филипп Лундберг — шведский математик. Он опубликовал эти результаты в 1909 году.

Решение В этом случае коэффициент поправки:

$$r = \frac{\beta\theta}{1+\theta} = \frac{0.001 \times 0.2}{1.2} = 0.0001667$$

Поэтому: $\psi(u) = e^{-ru} = e^{-0.0001667u}$

График этой функции выглядит следующим образом:

6.6 Изменение значений параметров

В этом пункте описывается эффект вероятности разорения, в случаях конечного и бесконечного времени, при изменении значений параметров.

Значимость результатов Лундберга в том, что мы можем использовать коэффициент поправки как индикатор платежеспособности страховщика. Большое значение коэффициента поправки означает низкую вероятность разорения.

Пример 8.8 Объясните эффект изменения каждого из параметров: u, θ, β и λ для вероятности окончательного разорения для ситуации из Примера 4.6.

Решение Коэффициент поправки: $\frac{\beta\theta}{1+\theta}$

Результаты Лундберга показывают нам, что вероятность окончательного разорения приблизительно равняется:

$$\psi(u) \doteq \exp\left(-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u\right)$$

здесь вместо $=$ должно быть равно с точкой.

Изменение u: Увеличение u дает уменьшение значения вероятности разорения. Это логично, так как, чем больше начальное значение u, тем больше величина фонда собственных средств. Поэтому страховщик может оплатить дополнительные убытки прежде, чем окажется платежеспособным.

Изменение θ: Так как $\frac{\theta}{1+\theta} = 1 - \frac{1}{1+\theta}$, то увеличение θ дает уменьшение значения вероятности разорения. И снова это логично, так как это означает, что страховщик включает большую безопасную нагрузку. Поэтому нагруженные премии превышают премию за риск на большую величину.

Изменение β: Увеличение β дает уменьшение значения вероятности разорения. И снова это логично, так как это означает, что среднее значение величины иска $\frac{1}{\beta}$ уменьшается. Поэтому сумма, выплачиваемая страховщиком по искам, уменьшается.

Изменение λ: Так как формула не содержит какую бы то ни было λ, то изменение значения λ никак не влияет на вероятность разорения. Это логично, если мы понимаем, что λ означает. λ это норма происшествия исков, выраженная в терминах произвольных промежутков времени, например 100 исков в год. Если, скажем, λ увеличили до 100 исков в месяц, то вероятность окончательного разорения для непрерывной модели будет точно такая же, так как различие будет только в том, что все будет происходить в 12 раз быстрее. Поэтому разорение может произойти в точно таких же обстоятельствах, разница будет только в том, что, если это произойдет, это произойдет в 1/12 времени.

(Заметим, что вероятность разорения для конечного периода времени зависит от значения λ.)

6.7 Эффект перестрахования

Этот подпараграф анализирует влияние коэффициента поправки и, следовательно, на вероятность разорения при простых соглашениях перестрахования.

Когда иски перестрахованы, вычисления точно такие же, как и раньше, исключая то, что премии и иски, используемые в вычислениях должны быть исправлены так, что они должны быть чистыми от перестрахования.

Пример 8.9

(example(4.9)) Иски случаются согласно пуассоновскому процессу с параметром λ, и величины индивидуальных исков X имеют $Exp(\beta)$ распределение. Офисные премии включают в себя безопасную нагрузку θ_1. Действует договор эксцедента индивидуального убытка, согласно которому перестраховщик оплачивает эксцедент индивидуального убытка, превышающего величину M, в оплату за премию, равную премии за риск перестрахования увеличенную на относительную безопасную нагрузку θ_2. Выведите уравнение, удовлетворяющее коэффициенту поправки, для прямого страховщика.

Решение Уравнение коэффициента поправки $\lambda + cr = \lambda M_X(r)$

Нетто-ставка дохода от премий для прямого страховщика равняется ставке премии, нагруженной для страхователя, минус ставка премий, выплачиваемая перестраховщику.

$$c = (1+\theta_1)\lambda\frac{1}{\beta} - (1+\theta_2)\lambda\int\limits_M^\infty (x-M)\beta e^{-\beta x}dx$$

Второе слагаемое можно проинтегрировать, используя замену $y = x - M$. Получаем:

$$c = \lambda\frac{1}{\beta}[(1+\theta_1) - (1+\theta_2)e^{-\beta M}]$$

Индивидуальные нетто иски это иски, выплачиваемые страхователю, минус покрытия перестрахования. Поэтому производящая функция моментов (которая определена при $r < \infty$) будет:

$$M_X(r) = \int\limits_0^M e^{rx}\beta e^{-\beta x}dx + \int\limits_M^\infty e^{rM}\beta e^{-\beta x}dx = \frac{1}{\beta - r}[\beta - re^{-(\beta-r)M}]$$

Поэтому уравнение коэффициента поправки:

$$\lambda + \lambda \frac{1}{\beta}[(1+\theta_1) - (1+\theta_2)e^{-\beta M}]r = \lambda \frac{1}{\beta - r}[\beta - re^{-(\beta - r)M}]$$

Сокращая на λ и умножая на $\beta(\beta - r)$, получаем:

$$\beta(\beta - r) + (\beta + r)[(1+\theta_1) - (1+\theta_2)e^{-\beta M}]r = \beta[\beta - re^{-(\beta - r)M}]$$

Сокращая на β^2 с каждой стороны:

$$-\beta r + (\beta - r)[(1+\theta_1) - (1+\theta_2)e^{-\beta M}]r = -\beta re^{-(\beta - r)M}$$

Сократим на r, исключая тривиальное решение, получим:

$$-\beta + (\beta + r)[(1+\theta_1) - (1+\theta_2)e^{-\beta M}] = -\beta e^{-(\beta - r)M}$$

Коэффициент поправки r это минимальное положительное решение этого уравнения.

Уравнение коэффициента поправки обычно не может быть решено явно с помощью алгебры. Поэтому обычно используются численные методы.

Пример 8.10 Используя приближение

$$e^x = 1 + x + x^2/2$$

найдите приблизительное численное значение коэффициента поправки для предыдущего примера при $\beta = 0.05$, $\theta_1 = 0.3$, $\theta_2 = 0.4$ и $M = 10$

Решение Используя данные значения, уравнение коэффициента поправки будет:

$$-0.5 + (0.05 + r)(1.3 - 1.4e^{-0.5}) = -0.05e^{-0.5+10r}$$

Умножая на $-20e^{0.5}$, чтобы избавиться от некоторых дробей, получаем:

$$e^{0.5} - (1 - 20r)(1.3e^{0.5} - 1.4) = e^{10r}$$

Раскрываем скобки в левой части равенства и используем приближение в правой:

$$0.90538 + 14.8668r = 1 + 10r + 50r^2$$

$$\text{то есть } -0.09462 + 4.8668r - 50r^2 = 0$$

Решаем, используя формулу для корней квадратного уравнения (выбираем наименьший положительный корень), получаем:

$$r = \frac{-4.8668 + \sqrt{4.8668^2 - 4(-50)(0.09462)}}{2(-50)} = 0.0268$$

Вопрос для самоподготовки 8.9. Найдите наилучшее приближение коэффициента поправки для этого примера, используя метод Ньютона-Рафсона.

Вопрос для самоподготовки 8.10. Выведите формулу коэффициента поправки перестраховщика для примера 8.9 и объясните свой ответ.

Вопрос для самоподготовки 8.11. Выведите формулу коэффициента поправки прямого страховщика для примера 8.9, если действует квотный договор перестрахования, согласно которому перестраховщик оплачивает долю $1 - k$ всех исков и получает долю $1 - k$ всех премий.

§7 Краткое изложение

Модель фонда собственных средств основного страховщика в будущем может быть представлена с помощью модели развития суммарного иска, которая используется для нахождения вероятности разорения в случаях конечного и бесконечного времени для непрерывной и дискретной модели.

Число исков может быть смоделировано, используя процесс Пуассона. Общие суммы исков могут быть смоделированы, используя обобщенный пуассоновский процесс.

Для непрерывной модели в случае бесконечного времени неравенство Лундберга, которое использует параметр, называемый коэффициентом поправки, обеспечивает хорошую оценку вероятности окончательного разорения.

Вероятность разорения можно также вычислить, когда действует перестрахование, работая с нетто-исками и нетто-премиями.

§8 Формулы

Процесс суммарных исков

$$U(t) = u + ct - S(t), \qquad t \geqslant 0 \qquad (\text{ непрерывный случай })$$

Вероятности разорения

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \text{ для некоторых } t] \qquad \text{непрерывный случай}$$

$$\psi(u, t_0) = P[U(t) < 0 \text{ для некоторых } t \leqslant t_0]$$

$$\psi_h(u) = P[U(t) < 0 \text{ для некоторых } t = h, 2h, 3h, \ldots] \qquad \text{дискретный случай}$$

$$\psi_h(u) = P[U(t) < 0 \text{ для некоторых } t = h, 2h, 3h, \ldots \text{ и } t \leqslant t_0]$$

Пуассоновский процесс

$$P[N(t) = x] = p_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t > 0)$$

Смешанный пуассоновский процесс

$$M_{S(t)}(u) = e^{\lambda t[M_x(u) - 1]}$$

$$E[S(t)] = \lambda t E(X) \qquad Var[S(t)] = \lambda t E(X^2)$$

Коэффициент поправки

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r)$$

$$r < \frac{2[c/\lambda - E(X)]}{E(X^2)}$$

Неравенство Лундберга

$$\psi(u) \leqslant e^{-ru}$$

$$\psi(u) = \frac{e^{-ru}}{E[e^{-ru(T)} \mid T < \infty]} \qquad \psi(u) \doteq e^{-ru}$$

Неравенство Лундберга

$$f(x) = 0 \qquad x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

§9 Приложение

В основном тексте мы использовали неравенство Лундберга без доказательства. Доказательсьтво этого утверждения приводится ниже. Работа над доказательством показывает, почему коэффициент поправки определяется таким способом. Вы должны уметь воспроизвести это доказательство на экзамене.

Неравенство Лундберга

Для смешанного пуассоновского процесса: $\psi(u) \leqslant e^{-ru}$

Доказательство (схема)

Доказательство использует математическую индукцию. Этапы доказательства:

1. Показываем, что результат эквивалентен доказательству того, что $\psi_n(u) \leqslant e^{-ru}$ для $n = 1, 2, \ldots,$, где $\psi_n(u)$ — вероятность, что разорение произойдет не позднее n-ого иска.[5]

2. Вывод выражения для $\psi_1(u)$ в терминах интегралов.

3. Показываем (используя определение коэффициента коррекции), что $\psi_1(u) \leqslant e^{-ru}$, то есть, что неравенство верное для $n = 1$.

4. Выражение $\psi_{n+1}(u)$ через $\psi_n(u)$, определяющееся временем и величиной первого иска.

5. Использование этого отношения , чтобы показать , что, если $\psi_n(u) \leqslant e^{-ru}$, то $\psi_{n+1}(u) \leqslant e^{-ru}$. (Процесс, происходящий на этой стадии очень похож на стадию 3.)

[5]Следует заметить, что используемое здесь $\psi_n(u)$ отличается от $\psi_h(u)$, которое мы использовали ранее для вероятности разорения в дискретной модели. Результат же Лундберга применяется только для непрерывной модели. Это не должно вызывать путаницу.

Детали каждой из ступеней доказательства таковы:

Ступень 1

Если происходит разорение, то оно должно случится во время иска. Если мы зададим $\psi_n(u)$, чтобы определить разорение, которое случиться во время или до n-ого иска, тогда вероятность окончательного разорения — $\psi(u) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(u)$ и неравенство $\psi(u) \leqslant e^{-ru}$ эквивалентно утверждению, что $\psi_n(u) \leqslant e^{-ru}$ для всех значений n=1,2,. . . .

Ступень 2

С того момента как мы предполагаем, что иски происходят в соответствии с пуассоновским процессом, время, которое пройдет до первого иска имеет экспоненциальное распределение с коэффициентом λ. Тогда вероятность, что иск случится в короткий временной интервал $(t, t+dt)$, равна $\lambda e^{-\lambda t}dt$

Разорение наступит в этом промежутке, если $u + ct - x < 0$, где x обозначает величину первого иска. Что эквивалентно: $x > u + ct$

Тогда вероятность того, что первый иск произойдет во временном интервале $(t, t + dt)$ и что он будет достаточно большим, чтобы вызвать разорение равна:

$$\lambda e^{-\lambda t}dt \times \int\limits_{u+ct}^{\infty} f_X(x)dx$$

Интегрирование по всем будущим временным интервалам, в течение которых может произойти первый иск, дает выражение для вероятности того, что он вызовет разорение:

$$\psi_1(u) = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_{u+ct}^{\infty} f_X(x)dxdt$$

Ступень 3

"Внутренний" интеграл берется по переменным x, для которых $x > u + ct$, то есть $u + ct - x < 0$. Так как поправочный коэффициент для этих x больше или равен 0, имеем неравенство $-r(u + ct - x) \geqslant 0$, которое означает, что $e^{-r(u+ct-x)} \geqslant 1$.

Тогда, если мы введем дополнительный коэффициент $e^{-r(u+ct-x)}$ во внутренний интеграл, это может только увеличить его значение.

$$\text{Итак:} \qquad \psi_1(u) = \int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_{u+ct}^{\infty} e^{-r(u+ct-x)} f_X(x) dx dt$$

Так как экспоненциальная функция всегда имеет положительные значения, коэффициент $e^{-r(u+ct-x)}$ будет также положительным, когда $x \leqslant u + ct$. Если мы расширим интеграл, чтобы включить сюда также и этот ряд переменных, это, опять же, может только увеличить его значение (так как $f_X(x)$ тоже всегда положительна).

$$\text{Тогда:} \qquad \psi_1(u) = \int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{\infty} e^{-r(u+ct-x)} f_X(x) dx dt \qquad \ldots(2)$$

Выводим за знак интеграла величины, не зависящие от x и от t:

$$\psi_1(u) = e^{-ru} \int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+cr)t} \int\limits_0^{\infty} e^{rx} f_X(x) dx dt$$

Сейчас мы видим, что внутренний интеграл — это $M_X(r)$, то есть момент производящей функции величины индивидуального иска, оцененным значением коэффициента поправки.

$$\psi_1(u) = e^{-ru} \int\limits_0^{\infty} \lambda M_X(r) e^{-(\lambda+cr)t} dt$$

Так как поправочный коэффициент определяется как корень уравнения $\lambda M_X(r) = \lambda + cr$:[6]

$$\psi_1(u) = e^{-ru} \int\limits_0^{\infty} (\lambda + cr) e^{-(\lambda+cr)t} dt$$

Так как интеграл соответствует функции плотности экспоненциального распределения с параметром $\lambda + cr$, проинтегрированной по всей области, он равен 1.

Получаем $\psi_1(u) \leqslant e^{-ru}$

[6]Это и есть причина, по которой коэффициент поправки определяется таким образом

Ступень 4

Мы можем установить отношение между $\psi_{n+1}(u)$ и $\psi_n(u)$, базируясь на времени и величине первого иска.

Если первый иск произошел в момент времени t, то

(а) величина иска будет такой, что $x > u+ct$, в таком случае разорение наступит в этот момент.

или

(б) величина иска будет такой, что $x \leqslant u + ct$, тогда процесс будет продолжаться, начиная с остатка $u + ct - x$ в момент времени t.

Тогда $\psi_{n+1}(u)$, вероятность того, что разорение наступит на или до $n+1$-ого иска, может быть выражено как сумма двух компонентов:

(а) вероятность того, что первый иск будет достаточно большим, чтобы вызвать разорение, преобладающая с коэффициентом 1 (так как разорение бесспорно в этом случае)

и

(б) вероятность того, что первый иск не окажется настолько велик, чтобы вызвать разорение, преобладающая с коэффициентом $\psi_n(u+ct-x)$ (то есть вероятность того, что разорение впоследствии произойдет до или на n-ом иске, начиная с нового остатка $u + ct - x$).

Выражаясь математически, это наблюдение приведет нас к следующему отношению, где первый двойной интеграл относится к случаю (а) и второй относится к случаю (б):

$$\psi_{n+1}(u) = \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_{u+ct}^\infty 1 f_X(x) dx dt + \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{u+ct} \psi_n(u+ct-x) f_X(x) dx dt$$

Ступень 5

Чтобы выполнить шаг индукции, мы предположим (условно), что этот результат верен для определенного значения n, то есть $\psi_n(u) \leqslant e^{-ru}$ (при каком-либо остатке u).

В частности, это предполагает, что: $\psi_n(u+ct-x) \leqslant e^{-r(u+ct-x)}$

Тогда, из отношения, выведенного в Ступени 4:

$$\psi_{n+1}(u) = \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_{u+ct}^\infty 1 f_X(x) dx dt + \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{u+ct} e^{-r(u+ct-x)} f_X(x) dx dt$$

Опять же, введение дополнительного коэффициента $e^{-r(u+ct-x)}$ во внутренний интеграл может только увеличить его значение. Если мы сделаем это, правая сторона станет такой:

$$\int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_{u+ct}^\infty e^{-r(u+ct-x)} f_X(x) dx dt + \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{u+ct} e^{-r(u+ct-x)} f_X(x) dx dt$$

Так как функции, интегрируемые в этих двух двойных интегралах теперь одинаковы, мы можем скомбинировать их, чтобы получить:

$$\psi_{n+1}(u) = \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^\infty e^{-r(u+ct-x)} f_X(x) dx dt$$

Это тот же интеграл, который у нас был в неравенстве (2) в Ступени 3. Тогда: $\psi_{n+1}(u) \leqslant e^{-ru}$

Итак, мы показали, что неравенство верное для $n = 1$ и что, если оно верно для n, то оно также верно для $n+1$. Из принципа математической индукции следует, что оно верное для всех значений $n = 1, 2, \ldots$

$$\text{то есть} \qquad \psi_n(u) \leqslant e^{-ru} \text{для } n = 1, 2, \ldots \qquad \Rightarrow \psi(u) \leqslant e^{-ru}$$

Вопрос для самоподготовки 8.12. Запишите интегральное соотношение, соответствующее $\psi(u)$, вероятности окончательного разорения.

Часть V