Глава 7

Основы теории–Теория разорения

§1 Введение

Учтем, что f(x) мала в окрестности нуля, поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Основные понятия

Условные обозначения

В предыдущей части были изучены суммарные иски, порожденные страховым портфелем в отдельный период времени. В актуарной литературе слово "риск"часто используется вместо фразы ”портфель полисов”. В этой части будут использоваться оба термина, так что под "риском"будет подразумеваться либо отдельный полис, либо совокупность полисов. Здесь мы перейдем к следующему этапу изучения и будем рассматривать иски, порожденные портфелем в последовательные периоды времени. Нам понадобятся некоторые условные обозначения.

$N(t)$	число исков, порожденных портфелем во временном интервале $[0, t]$, для всех $t \geqslant 0$.
X_i	величина i-ого иска, $i = 1, 2, 3, \ldots$
$S(t)$	суммарные иски во временном интервале $[0, t]$, для всех $t \geqslant 0$.

$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность случайных величин. $\{N(t)\}_{t \geqslant 0}$ и $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ — последовательности случайных величин, для каждой из которых $t \geqslant 0$; другими словами, $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ — случайные процессы.

Легко увидеть, что
$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$
учитывая, что $S(t)$ равно нулю, если $N(t)$ равно нулю. Случайный процесс $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, по определению, известен как процесс суммарных исков для риска. Случайные переменные $N(1)$ и $S(1)$ показывают число исков и суммарные иски соответственно для данного портфеля в первую единицу времени. Эти две случайные величины соотносятся со случайными величинами N и S соответственно, введенными в Главе 3.

Страховщик этого портфеля будет получать премии от держателей полиса. На протяжении всей этой части предполагаем, что премии поступают непрерывно и с постоянной интенсивностью. Пусть c— интенсивность премиального дохода в единицу времени, так что совокупный премиальный доход, полученный в интервал $[0, t]$ равен ct. Кроме того, можно предположить, что c строго положительна.

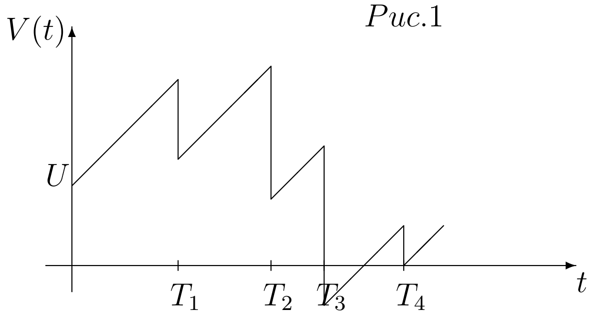
§2 Процесс формирования фонда собственных средств

Допустим, что в момент 0 страховщик имеет некоторую сумму денег, отложенную для данного портфеля. Эта сумма денег называется начальный фонд собственных средств (остаток) и обозначается U. В дальнейшем для краткости будем называть этот фонд капиталом. Всегда можно предположить, что $U \geqslant 0$. Страховщик нуждается в этом начальном остатке, потому что будущие доходы от премий могут быть не достаточны, чтобы покрыть будущие иски. Капитал страховщика в любой будущий момент $t (> 0)$ — это случайная величина, так как его значение зависит от практики выплаты страховых возмещений к моменту времени t. Значение капитала в момент времени t обозначается $U(t)$. Можно записать для $U(t)$ следующую формулу:
$$U(t) = U + ct - S(t)$$
Иными словами, капитал страховщика в момент времени t — это начальный остаток плюс премиальный доход к моменту t минус суммарные иски к этому моменту. Заметим, что начальный остаток и премиальный доход — не случайные величины, так как они определяются до начала процесса риска. Вышеуказанная формула обоснована для $t \geqslant 0$, с учетом

того, что $U(0) = U$. Для данного значения t, $U(t)$ — случайная величина, потому что $S(t)$ — случайная величина. Следовательно, $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ — случайный процесс, который известен как процесс движения денежных средств или процесс формирования фонда собственных средств.

Рисунок 1 показывает один из возможных результатов такого процесса. Иски происходят в моменты времени T_1, T_2, T_3, и T_4 и в эти моменты капитал непосредственно понижается на величину иска. Между исками капитал возрастает с постоянной интенсивностью c в единицу времени. Модель, используемая для определения капитала страховщика, включает в себя множество упрощений, как и любая другая модель комплексной реальной операции. Некоторые важные упрощения состоят в предположении, что иски оплачиваются сразу, как только происходят, и что капитал страховщика не пускается в оборот для получения процентов. Несмотря на свою простоту, эта модель может дать содержательное понимание математики страховой операции.

*Рис.*1



2.1 Вероятность разорения в непрерывной модели

Из Рисунка 1 видно, что капитал страховщика опускается ниже нуля в результате иска, произошедшего в момент T_3. Говоря общими словами, в тот момент, когда капитал опустится ниже нуля, деньги страховщика иссякнут, и говорят, что наступит разорение. В этой упрощенной модели, страховщик хочет сделать вероятность этого события, то есть вероятность разорения, настолько маленькой, насколько это возможно, или, по крайней мере, ниже некоторой заранее определенной величины. Говоря еще более общим языком, разорение может пониматься в значении банкротства, хотя, на практике, определение, является ли страховая компания банкротом или нет, очень сложная проблема. Другой способ рассмотрения вероятности разорения — это представить ее, как вероятность того, что, в некоторый будущий момент времени, страховой компании будет нужно предоставить большее состояние, чтобы финансировать определенный страховой портфель.

Дадим более точное определение. Следующие две вероятности определяются так:

$$\psi(U) = P[U(t) < 0, \text{для некоторых } t, 0 < t < \infty]$$

$$\psi(U,t) = P[U(\tau) < 0, \text{для некоторых } \tau, 0 < \tau < t].$$

$\psi(U)$ — это вероятность окончательного разорения (с данным начальным остатком U) и $\psi(U,t)$ — вероятность разорения в момент времени t (с данным начальным остатком U). К этим вероятностям иногда относятся, как к вероятности разорения за неограниченный период времени и вероятности разорения за ограниченный период времени. Существует несколько важных логических отношений между этими вероятностями для $0 < t_1 \leqslant t_2 < \infty$ и для $0 \leqslant U_1 \leqslant U_2$:

$$\psi(U_2, t) \leqslant \psi(U_1, t) \tag{7.0}$$

$$\psi(U_2) \leqslant \psi(U_1) \tag{7.0}$$

$$\psi(U, t_1) \leqslant \psi(U, t_2) \leqslant \psi(U) \tag{7.0}$$

$$\lim_{t\to\infty} \psi(U,t) = \psi(U) \tag{7.0}$$

Интуитивные объяснения для этих формул:

Для большего начального остатка менее вероятно, что разорение произойдет за конечный период времени, следовательно, (2.1) или за бесконечный период времени, следовательно, (2.1).

Для данного начального остатка U, для более долгого периода рассмотрения наиболее вероятно, что произойдет разорение, отсюда (2.1).

Наконец, вероятность окончательного разорения может быть приблизительно найдена с помощью вероятности разорения за конечный период времени t, при условии, что t достаточно большое, поэтому (2.1).

2.2 Вероятность разорения в дискретной модели

Две вероятности разорения, рассматриваемые до этого момента, являются вероятностями для непрерывной модели, называемые так потому, что они контролируют разорение непрерывно. На практике, может быть возможным (или даже желательным) контролировать разорение только в дискретные интервалы времени.

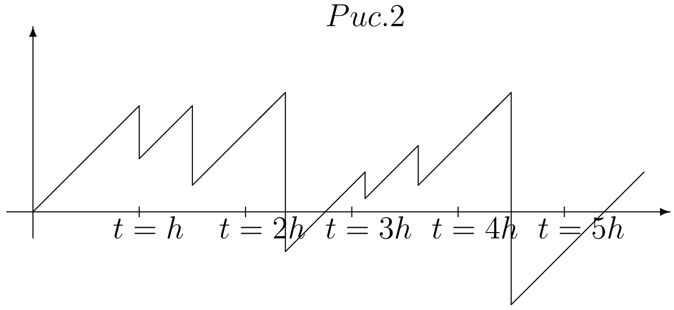
Для данного интервала времени, обозначенного h, определены следующие две вероятности разорения для дискретной модели:

$$\psi_h(U) = P[U(t) < 0, \text{ для некоторых } t, t = h, 2h, 3h, \ldots]$$

$$\psi_h(U,t) = P[U(\tau) < 0, \text{ для некоторых } \tau, \tau = h, 2h, 3h, \ldots, t-h, t].$$

Заметим, что для удобства определения $\psi_h(U,t)$ предполагается, что t кратно h. Рисунок 2 показывает такую же реализацию процесса формирования капитала, как и изображенная на Рисунке 1, но с предположением, что этот процесс контролируется только в дискретные временные интервалы. Черные метки показывают значения процесса в целые временные интервалы (то есть $h = 1$); черные метки вместе с белыми показывают значения процесса в интервалы длинной $\frac{1}{2}$.

*Рис.*2



Из Рисунка 2 можно увидеть, что в дискретных моментах с $h = 1$, для этой реализации процесса разорения не произойдет до момента 5, а для дискретных моментов с $h = \frac{1}{2}$ разорение произойдет (в момент $2\frac{1}{2}$).

Ниже перечислены пять отношений между различными дискретными вероятностями разорения для $0 \leqslant U_1 \leqslant U_2$ и для $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < \infty$. Формулы (2.2), (2.2), (2.2) и (2.2) — дискретные версии формул (2.1), (2.1), (2.1) и (2.1) и их интуитивные объяснения похожи. Интуитивное объяснение формулы (2.2) отображено на Рисунке 2.

$$\psi_h(U_2,t) \leqslant \psi_h(U_1,t) \tag{7.0}$$

$$\psi_h(U_2) \leqslant \psi_h(U_1) \tag{7.0}$$

$$\psi_h(U,t_1) \leqslant \psi_h(U,t_2) \leqslant \psi_h(U) \tag{7.0}$$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_h(U,t) = \psi_h(U) \tag{7.0}$$

$$\psi_h(U,t) \leqslant \psi(U) \tag{7.0}$$

Интуитивно ожидается, что следующие два отношения верны, так как вероятность разорения в непрерывной модели можно аппроксимировать вероятностью разорения дискретной модели, с таким же начальным остатком U и временным горизонтом t, при условии, что разорение контролируется достаточно часто, то есть что h достаточно мало.

$$\lim_{h\to 0+} \psi_h(U,t) = \psi(U,t) \tag{7.0}$$

$$\lim_{h\to 0+} \psi_h(U) = \psi(U) \tag{7.0}$$

Формулы (2.2) и (2.2) верны, но их доказательства довольно громоздки и не будут приводиться здесь.

До сих пор не было сделано никаких предположений относительно распределения $S(t)$. Сделав эти предположения, можно получить более детальные результаты, в отличие от очень общих результатов, представленных в этом параграфе. Такие предположения сделаны в следующем разделе.

§3 Пуассоновский и обобщенный пуассоновский процессы

3.1 Введение

В этом разделе будут сделаны некоторые предположения о случайном процессе числа исков $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ и последовательности исковых величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Случайный процесс числа исков может, предположительно, быть пуассоновским процессом, ведущим к обобщенному пуассоновскому процессу $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ для суммарных исков. Предположения, сделанные в этом разделе, распространяются на на всю главу в целом.

3.2 Пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс — это пример вычислительного процесса. Здесь нас интересует количество исков, возникающих для какого-либо риска. Так как количество исков подсчитывается с течением времени, случайный процесс числа исков $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ должен удовлетворять следующим условиям:

i) $N(0) = 0$, то есть в момент 0 исков не будет

ii) для любого $t > 0$, $N(t)$ должно иметь целое значение

iii) если $s < t$, то $N(s) \leqslant N(t)$, то есть число исков с течением времени не убывает

iv) если $s < t$, то $N(t) - N(s)$ представляет собой число исков, произошедших во временном интервале (s, t).

Случайный процесс $\{N(t)\}_{t \geqslant 0}$ является пуассоновским процессом с параметром λ, если он удовлетворяет следующим условиям:

i) $N(0) = 0$, и $N(s) \leqslant N(t)$ при $s < t$

ii) $P[N(t+h) = r | N(t) = r] = 1 - \lambda h + o(h)$
$P[N(t+h) = r+1 | N(t) = r] = \lambda h + o(h)$
$P[N(t+h) > r+1 | N(t) = r] = o(h)$

iii) при $s < t$ число исков в интервале $(s, t]$ не зависит от числа исков к моменту s.

Условие (ii) утверждает, что в очень короткий интервал длины h возможное число исков — это только ноль или один. Заметим, что условие (ii) также подразумевает, что число исков в интервале длины h не зависит от того, в какой момент мы этот интервал рассматриваем.

Причина, по которой процесс, удовлетворяющий условиям (i) и (iii) называется пуассоновским процессом, заключается в том, что для фиксированного значения t, случайная величина $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt. Это доказывается следующим образом:

Пусть $p_n(t) = P[N(t) = n]$. Тогда

$$p_n(t) = \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{7.0}$$

что может быть доказано выведением и решением дифференциально-разностного уравнения.

Для фиксированного значения $t > 0$ и малого положительного значения h, поставим условия для числа исков в момент t и запишем

$$p_n(t+h) = p_{n-1}(t)[\lambda h + o(h)] + p_n(t)[1 - \lambda h + o(h)] + o(h) =$$

$$= \lambda h p_{n-1}(t) + [1 - \lambda h]p_n(t) + o(h).$$

Таким образом,

$$p_n(t+h) - p_n(t) = \lambda h[p_{n-1}(t) - p_n(t)] + o(h) \tag{7.0}$$

и это тождество верно для $n = 1, 2, 3, \dots$.

Теперь разделим (3.2) на h и устремим h к нулю сверху, чтобы получить дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = \lambda[p_{n-1}(t) - p_n(t)] \tag{7.0}$$

При $n = 0$ тождественный анализ приводит к результату

$$\frac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda p_0(t) \tag{7.0}$$

Решение для $p_n(t)$ получим с помощью введения производящей функции вероятности $G(s,t)$, определенной как

$$G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_n(t)$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{d}{dt}p_n(t)$$

Далее умножаем (3.2) на s^n и суммируем по всем значениям n, чтобы получить

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{d}{dt}p_n(t) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} s^n p_{n-1}(t) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} s^n p_n(t).$$

Прибавляем (3.2) к этому тождеству и имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{d}{dt}p_n(t) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} s^n p_{n-1}(t) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_n(t),$$

что может быть записано как

$$\frac{d}{dt}G(s,t) = \lambda s G(s,t) - \lambda G(s,t),$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{1}{G(s,t)}\frac{d}{dt}G(s,t) = \lambda(s-1) \tag{7.0}$$

Так как левая часть (3.2) — то же самое, что производная по t от $\log G(s,t)$, (3.2) можно проинтегрировать и найти, что

$$\log G(s,t) = \lambda t(s-1) + c(s),$$

где $c(s)$ — некоторая функция от s. $c(s)$ может быть определена из тех соображений, что при $t = 0$ $p_0(t) = 1$ и $p_n(t) = 0$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, $G(s, 0) = 1$ и $\log G(s, 0) = 0 = c(s)$.

Таким образом,

$$G(s, t) = \exp\{\lambda t(s - 1)\},$$

что является производящей функцией для распределения Пуассона с параметром λt. Так как производящие функции и функции распределения в данном случае должны быть одинаковыми, получим, что $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt.

Изучение пуассоновского процесса завершим рассмотрением распределением времени до начала первого иска и интервалами между исками.

Пусть случайная величина T_1 обозначает время первого иска. Затем, фиксируем переменную t. Если к моменту t не произошло ни одного иска, то $T_1 > t$. Следовательно,

$$P[T_1 > t] = P[N(t) = 0] = \exp\{-\lambda t\}$$

и

$$P[T_1 \leqslant t] = 1 - \exp\{-\lambda t\},$$

то есть T_1 имеет экспоненциальное распределение с параметром λ.

Пусть для $i = 1, 2, 3, \ldots$, случайные величины T_i обозначают время между $(i-1)$-ым и i-ым исками. Тогда

$$P[T_{n+1} > t | \sum_{i=1}^{n} T_i = r] = P[\sum_{i=1}^{n+1} T_i > t + r | \sum_{i=1}^{n} T_i]$$

$$= P[N(t + r) = n | N(r) = n]$$

$$= P[N(t + r) - N(r) = 0 | N(r) = n].$$

Из условия (2.2),

$$P[N(t + r) - N(r) = 0 | N(r) = n] = P[N(t + r) - N(r) = 0].$$

Наконец,

$$P[N(t + r) - N(r) = 0] = P[N(t) = 0] = \exp\{-\lambda t\},$$

так как число исков во временном интервале длины r не зависит от того, в какой момент начинает рассматриваться этот интервал (условие (ii)). Таким образом, интервалы между моментами появления событий также имеют экспоненциальное распределение с параметром λ.

3.3 Обобщенный пуассоновский процесс

В этом разделе пуассоновский процесс для числа исков будет скомбинирован с распределением величины иска, чтобы определить обобщенный пуассоновский процесс для процесса суммарных исков, как сказано в разделе 1.1.

Сделаем несколько важных предположений:

- случайные величины $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимы и одинаково распределены
- случайные величины $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ не зависят от $N(t)$ для всех $t \geqslant 0$
- случайный процесс $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ — это пуассоновский процесс с параметром λ.

Как было показано в разделе 2.2, последнее предположение означает, что для любого $t \geqslant 0$ случайная величина $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt, так что

$$P[N(t)=k] = \exp\{-\lambda t\}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad \text{для } k = 0, 1, 2, \ldots$$

При таких предположениях процесс суммарных исков $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ называется обобщенным пуассоновским процессом с пуассоновским параметром λ. Сравнивая эти предположения с данными из предыдущей части (Разделы 1.3 и 2.2), можно увидеть взаимосвязь между ними: если $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ — обобщенный пуассоновский процесс с параметром λ, то, для фиксированного значения t ($t \geqslant 0$), $S(t)$ имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром λt. (Заметим, что в терминологии есть небольшое изменение: "параметр λ"становится "параметром λt то есть изменение процесса распространяется и на распределение.)

Общую функцию распределения для X_i-ых будем обозначать $F(x)$ и для оставшейся части этой главы предположим, что $F(0) = 0$, так что все иски являются положительными величинами.

Функцию плотности для X_i, если она существует, обозначим $f(x)$ и k-ый момент для X_i в окрестности нуля, если он существует, будем обозначать m_k, так что

$$m_k = E[X_i^k] \text{ для } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Если общая производящая функция моментов для X_i существует, то ее значение в точке r будем обозначать $M_X(r)$.

Так как для фиксированного значения t, $S(t)$ имеет обобщенное пуассоновское распределение, из Части 3 (раздела 2.2) следует, что процесс $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ имеет среднее значение $\lambda t m_1$, дисперсию $\lambda t m_2$, и производящую функцию моментов $M_S(r)$, где

$$M_S(r) = \exp\{\lambda t(M_X(r) - 1)\}$$

Для оставшейся части этой главы сделаем следующее (интуитивно справедливое) предположение, касающееся интенсивности премиального дохода:

$$c > \lambda m_1, \tag{7.0}$$

так что премиальный доход страховщика (в единицу времени) больше, чем ожидаемые исковые затраты (в единицу времени). Иногда c может быть записано как

$$c = (1+\theta)\lambda m_1,$$

где $\theta(>0)$ — относительная безопасная нагрузка премии.

3.4 Техническая сторона

В следующем разделе нам понадобится технический результат, касающийся $M_X(r)$ (производящей функции моментов распределения величины индивидуального иска), который, для удобства, будет представлен здесь.

До конца этой главы будет действовать предположение, что существует некоторое число γ $(0 < \gamma \leqslant \infty)$, такое что $M_X(r)$ конечно для всех $r > \gamma$ и

$$\lim_{r\to\gamma^-} M_X(r) = \infty \tag{7.0}$$

(Например, если $X_i(s)$ ограничено некоторым конечным значением, то γ будет ∞; если $X_i(s)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром α, то γ будет равно α).

В следующем разделе нам понадобится следующий результат:

$$\lim_{r\to\gamma^-}(\lambda M_X(r) - cr) = \infty \tag{7.0}$$

Если γ конечно, (3.4) сразу следует из (3.4). Теперь можно показать, что (3.4) имеет место при бесконечном γ. Это требует немного больше внимания. Во-первых, зададим положительное число ε, такое что

$$P[X_i > \varepsilon] > 0.$$

Это возможно потому, что все величины исков положительны. Обозначим такую вероятность π. Тогда

$$M_X(r) \geqslant e^{r\varepsilon}\pi.$$

Следовательно,

$$\lim_{r\to\gamma^-}(\lambda M_X(r) - cr) \geqslant \lim_{r\to\gamma^-}(\lambda e^{r\varepsilon}\pi - cr) = \infty.$$

§4 Коэффициент поправки и неравенство Лундберга

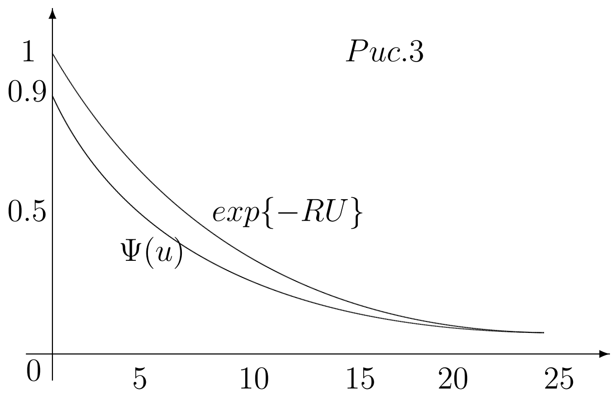
4.1 Неравенство Лундберга

Неравенство Лундберга утверждает, что

$$\psi(U) \leqslant \exp\{-RU\},$$

где U — это начальный остаток страховщика. R — это параметр, связанный с остаточным процессом, известный как коэффициент поправки. Его значение зависит от распределения суммарных исков и интенсивности премиального дохода. До того, как определить R и доказать неравенство Лундберга, проиллюстрируем важность этого результата и некоторые характеристики коэффициента поправки.

На Рисунке 3 изображены графики функций $\exp\{-RU\}$ и $\psi(U)$ для U, когда исковые величины экспоненциально распределены со средним значением 1 и когда премиальный коэффициент нагрузки 10%. (Решение для R будет найдено в разделе 4.2. Формула для $\psi(U)$ дана в разделе 4.) Легко увидеть, что для больших значений U, $\psi(U)$ очень близко к верхней границе, так что $\psi(U) \simeq \exp\{-RU\}$.



В актуарной литературе, $\exp\{-RU\}$ часто используется как приближение $\psi(U)$.

R может интерпретироваться как измерительный риск. Большее значение R будет меньшим значением верхней границы для $\psi(U)$. Следовательно, $\psi(U)$ будет закономерно уменьшаться, когда R будет возрастать. R — это функция от параметров, которые влияют на вероятность разорения, и поведение R, как функции этих параметров может быть исследовано.

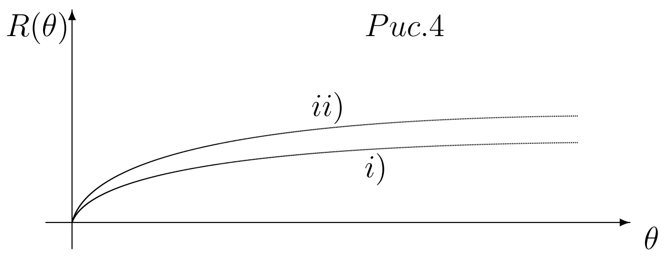


Рисунок 4 показывает график R, как функцию относительной безопасной нагрузки, θ, когда

i) распределение величины иска экспоненциальное со средним значением 10, и

ii) все иски имеют величину 10.

Заметим, что в обоих случаях R — возрастающая функция от θ. Закономерно, что $\psi(U)$ — убывающая функция от θ, и, так как $\psi(U) \simeq \exp\{-RU\}$, любой коэффициент, вызывающий убывание $\psi(U)$, вызывает возрастание R.

Заметим также, что значение R, когда исковые величины экспоненциально распределены, меньше, чем, когда величины исков равны 10. Опять же, такой результат не удивителен. Оба распределения исковых величин имеют одинаковое среднее значение, но экспоненциальное распределение имеет большее непостоянство. Большее непостоянство связано с большим риском, и, следовательно, для экспоненциального распределения закономерно большее значение $\psi(U)$ и меньшее значение R. Этот пример иллюстрирует, что R находится под влиянием относительной безопасной нагрузки и характеристик распределения величины индивидуальных исков. В общем-то, мы определили и ввели R, чтобы объединить все коэффициенты, влияющие на процесс формирования капитала.

4.2 Коэффициент поправки

Процесс формирования капитала зависит от начального остатка, процесса суммарных исков и интенсивности премиального дохода. Коэффициент поправки — это параметр, связанный с процессом формирования капитала, который учитывает два из этих факторов: суммарные иски и премиальный доход. Коэффициент поправки дает меру риска для процесса формирования капитала. Если суммарные иски являются обобщенным пуассоновским процессом, коэффициент поправки определяется в терминах пуассоновского параметра, момента производящей функции величины индивидуального иска и премиального дохода в единицу времени.

Коэффициент поправки, обозначаемый R, определяется как единственный положительный корень уравнения

$$\lambda M_X(r) - \lambda - cr = 0. \tag{3.1}$$

Преобразуем его,

$$\lambda M_X(r) = \lambda + cr. \tag{3.2}$$

Заметим, что уравнение (3.1) подразумевает, что значение коэффициента поправки зависит от пуассоновского параметра, распределения величины индивидуального иска и интенсивности премиального дохода. Однако, записав $c = (1+\theta)\lambda m_1$, получим

$$M_X(r) = 1 + (1+\theta)\lambda m_1 r,$$

так что R не зависит от параметра Пуассона и зависит только от относительной безопасной нагрузки, θ, и от распределения величины индивидуального иска.

Можно показать, что уравнение (3.1) действительно имеет только один положительный корень.

Определим $g(r) = \lambda M_X(r) - \lambda - cr$ и рассмотрим график $g(r)$ на интервале $[0,\gamma]$. Заметим, во-первых, что $g(0) = 0$. Далее, $g(r)$ в нуле — убывающая функция, так как

$$\frac{d}{dr}g(r) = \lambda\frac{d}{dr}M_X(r) - c,$$

так что производная $g(r)$ в точке $r = 0$ равна $\lambda m_1 - c$, что, по предположению меньше нуля (2.8).

Также можно показать, что, если функция $g(r)$ имеет экстремум, то он будет минимумом функции. Функция слабо выпукла в районе нуля. Следовательно, может существовать только один экстремум, так как любой экстремум здесь является минимумом. Чтобы показать, что он существует, заметим из (2.10), что $\lim\limits_{r\to\gamma^-} g(r) = \infty$.

Таким образом, существует единственное положительное число R, удовлетворяющее уравнению (3.1).

Уравнение (3.1) — неявное выражение для R. Для некоторых видов $F(x)$ существует явное решение для R; для других уравнение приходится решать в числах.

Рассмотрим экспоненциальное распределение, где $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$.

Для этого распределения, $M_X(r) = \frac{\alpha}{\alpha - r}$, тогда

$$\lambda + cr = \frac{\lambda\alpha}{\alpha - R}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda\alpha - \lambda R + cR\alpha - cR^2 = \lambda\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad R^2 - (\alpha - \lambda/c)R = 0$$

$$\Rightarrow \qquad R = \alpha - \lambda/c,$$

так как R — положительный корень уравнения (3.1).

Если $c = (1+\theta)\lambda/\alpha$, то $R = \alpha\theta/(1+\theta)$.