Глава 4

Основы теории–Перестрахование

§1 Перестрахование

Иски, предъявленные страховым компаниям, должны удовлетворяться полностью, и для того, чтобы защитить себя от больших исков, сама компания может страховаться, это называется перестрахование. В данной части предполагается, что договор перестрахования бывает двух основных типов: индивидуальный договор эксцедента убытка или пропорционального перестрахование.

1.1 Эксцедент убытка

В случае договора эксцедента убытка, от каждого страхового возмещения, превышающего M - уровень удержания, перестраховщиком оплачивается величина превышения.

Соглашение по эксцеденту убытка перестрахования может быть составлено следующим образом: если предъявлен иск на сумму X, то компания выплачивает величину Y, где

$$Y = X, \qquad \text{если } X \leqslant M$$
$$Y = M, \qquad \text{если } X > M$$

Перестраховщик платит сумму $Z = X - Y$.
Ответственность страховщика изменяется по двум основным направлениям:

1. уменьшается среднее значение величины выплат

2. уменьшается дисперсия величины выплат

Оба эти вывода - простые следствия того факта, что эксцедент убытка задает верхнюю границу крупных исков. Обе величины, среднее значение X и среднее значение величины Y, выплачиваемой страховой компанией по договору эксцеденту убытка, теперь можно определить. Как видно, среднее значение, выплачиваемое страховщиком без перестрахования равно:

$$E(X) = \int\limits_0^\infty x f(x) dx \tag{4.1}$$

где $f(x)$ – функция плотности распределения вероятности суммы иска X. С уровнем удержания M среднее значение Y становится:

$$E(Y) = \int\limits_0^M x f(x) dx + MP(X > M) \tag{4.2}$$

В более широком смысле, производящая функция моментов величины Y, суммы, выплачиваемой страховщиком, равна:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int\limits_0^M e^{tx} f(x) dx + e^{tM} P(X > M) \tag{4.3}$$

Формулы (4.1) и (4.2) иллюстрируют основную трудность при перестраховании эксцедента убытка. В (4.2) интеграл неполный (т.е. пределы интегрирования от 0 до M, а не до ∞). Та же трудность возникнет и при страховании с эксцедентом. При перестраховании эксцедента убытка есть метод, позволяющий перейти от неполного интеграла к полному. Используем (4.2):

$$E(Y) = \int\limits_0^\infty x f(x) dx - \int\limits_M^\infty x f(x) dx + M \int\limits_M^\infty f(x) dx =$$

$$= E(X) - \int\limits_M^\infty (x - M) f(x) dx$$

Полный интеграл получится, если ввести $z = x - M$. Таким образом,

$$E(Y) = E(X) - \int\limits_0^\infty z f(z + M) dz \tag{4.4}$$

простая, но важная формула. Уменьшение ожидаемой суммы иска:

$$\int_0^\infty z f(z+M)dz \tag{4.5}$$

Но есть проблема инфляции. Предположим, что иск X подвержен инфляции с темпом k, а удержание M остается фиксированным. Как это повлияет на соглашение? Сумма иска теперь kX, а сумма, выплачиваемая страховщиком, Y:

$$Y = kX, \qquad \text{если } kX \leqslant M$$

$$Y = M, \qquad \text{если } kX > M$$

Средняя сумма, выплачиваемая страховщиком, равна:

$$E(Y) = \int_0^{M/k} kxf(x)dx + MP(X > M/k) \tag{4.6}$$

Тем же образом, каким было получено (4.4), можно преобразовать (4.6) в полный интеграл. (4.6) можно записать как:

$$E(Y) = \int_0^\infty kxf(x)dx - \int_{M/k}^\infty kxf(x)dx + M\int_{M/k}^\infty f(x)dx.$$

$$= kE(X) - k\int_{M/k}^\infty (x - M/k)f(x)dx$$

Новая средняя сумма, выплачиваемая страховщиком, равна:

$$E(Y) = k(E(X) - \int_0^\infty yf(y + M/k)dy) \tag{4.7}$$

Отметим, что интеграл в (4.7) имеет тот же вид, что в (4.4). Еще важно отметить, что новая средняя величина иска (4.7) не в k раз больше средней величины иска без учета инфляции. Аналогичный подход можно использовать в ситуациях, когда уровень удержания привязан к некоторому темпу инфляции. Рассмотрим задачу оценивания при перестраховании эксцедента убытка. Пусть в данных исках показаны только иски, уплаченные страховщиком. Обычно данные записываются в виде

$$x_1, x_2, M, x_3, M, x_4, x_5, \ldots \tag{4.8}$$

и требуется оценка распределения основного брутто-иска. Метод моментов не применим, т.к. даже среднюю сумму иска нельзя вычислить. С другой стороны, можно использовать метод процентилей без изменения, например, если уровень удержания М высокий и только более высокие выборочные процентили были подвергнуты (нескольким) искам перестрахования.

Статистическая терминология для выборки формы (4.8) – цензурирование. В общем случае, цензурированная выборка встречается, когда некоторые величины записаны точно, а про остальные известно только, что они превосходят некое частное значение, в данном случае уровень удержания М. К цензурированным выборкам можно применить максимальное правдоподобие. Оно состоит из двух слагаемых. Величины, записанные точно, входят в первое слагаемое:

$$L_1(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

где n величин, x_i, известно точно. А цензурированные величины входят во второе слагаемое:

$$L_2(\theta) = \prod_{i=1}^{m} P(X > M)$$

т.е. $[P(X > M)]^m$, где m исков перестрахования. Полное правдоподобие:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \times [(1 - F(M;\theta))]^m \qquad (4.9)$$

где $F(x;\theta)$ - функция распределения исков.

Теперь рассмотрим перестрахование с точки зрения перестраховщика. Перестраховщик может иметь учет только тех исков, которые больше М. Если иск меньше М, перестраховщик может даже не знать, что иск имеет место. Перестраховщик таким образом имеет задачу оценки распределения брутто-исков, только когда рассматриваются иски больше М. Пользуясь статистической терминологией, перестраховщик наблюдает иски из усеченного распределения.

Допустим, что сумма брутто - исков имеет плотность распределения вероятностей $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$. Допустим, что перестраховщик информирован об исках, больших уровня удержания M, и имеет учет $z = x - M$. Какова функция распределения $g(z)$ для суммы z, выплачиваемой перестраховщиком?

Решение:

$$P(Z < z) = P(X < z + M | X > M) = \int\limits_{M}^{z+M} \frac{f(x)}{1 - F(M)} dx =$$
$$= \frac{F(z + M) - F(M)}{1 - F(M)}$$

Дифференцируя функцию распределения исков перестраховщика

$$g(z) = \frac{f(z + M)}{1 - F(M)}, \qquad z > 0 \tag{4.10}$$

1.2 Пропорциональное перестрахование

В пропорциональном перестраховании страховщик платит фиксированную часть иска, независимо от размера платежа. Используя те же обозначения, что и выше, пропорциональное перестрахование может быть описано следующим образом: если предъявлен иск на сумму X, то компания платит Y где

$$Y = \alpha X, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Параметр α известен как уровень удержания, следует иметь ввиду, что термин уровень удержания используется как при страховании с эксцедентом, так и в пропорциональном перестраховании

Т.к. сумма, выплачиваемая страховщиком по иску X равна αX и сумма, выплачиваемая перестраховщиком, равна $(1-\alpha)X$, то распределение обеих сумм можно найти простой заменой переменой.

1.3 Полисы с эксцедентом убытка

Страховые полисы с эксцедентом убытка присущи страхованию автотранспорта и многим другим типам страхования имущества и несчастных случаев. По этому типу полисов страхователь соглашается понести полностью ущерб до предельной суммы L. Если ущерб на сумму X превосходит L, то держатель полиса предъявляет иск только на сумму $X-L$. Если Y – сумма, выплачиваемая страховщиком, то в этом случае:

$$Y = 0, \qquad X \leqslant L$$
$$Y = X - L, \qquad X > L$$

Ясно, что страховая премия по любому полису с экцедентом будет меньше, чем по полису без экцедента. Положение страховщика по полису с экцедентом точно такое же, как у перестраховщика в случае перестрахования по договору эксцедента убытка. Положение держателя полиса – как для страховщика с договором перестрахования эксцедента убытка, поскольку убытки описываются точно так же.

§2 Вопросы студентам

В1 Не странно ли, что нетто-ставка (страхового взноса) может означать "игнорировать перестрахование или "игнорировать расходы (издержки)"

О1 Да, когда встречаешь слова нетто, брутто, всегда спрашивай себя, нетто или брутто чего? В контексте становится ясно, относится это к издержкам, перестрахованию, или налогам. Например, нетто-процентная ставка будет означать "за вычетом налогов в то время как иск брутто будет означать "до вычета возмещения перестрахования"

В2 Есть ли другие формы перестрахования?

О2 Все формы перестрахования в основном или пропорционального, или непропорционального типов. Однако есть много вариаций и много отдельных видов перестрахования, такие как перестрахование катастроф, которое защищает против огромных убытков, случающихся за короткий период (например, ущерб после урагана)

В3 Могут ли квотный договор и договор эксцендентного перестрахования в примере 2.4 действовать одновременно?

О3 На практике обычно для рисков, покрываемых несколькими взаимодействующими договорами важно, чтобы порядок, в котором договоры применяются, был ясно определен, т.к. платежи от перестрахователей зависят от того, кто платит первым. Обычная ситуация, когда есть несколько отдельных договоров эксцендентного перестрахования "один над другим обеспечивающие покрытие различных уровней, например

Договор 1:	£25,000 - £50,000
Договор 2:	£50,000 - £250,000
Договор 3:	£250,000 - £1,000,000
Договор 4:	£1,000,000+

Обычно покрытие эксцендента убытка применяют перед пропорциональным перестрахованием.

(Для любознательных студентов - повторить вычисления в Примере 2.4 с договорами 1 и 2, действующими вместе, и сравнить результаты)

2.1 Подсказки для ответов на вопросы

1. Обычно экзаменационный вопрос по этой теме включает алгебраическую часть, где нужно вывести интегральную формулу (примерно треть общей оценки), затем численная задача, с использованием формул. Нужно уметь доказывать интегральные формулы, используемые в эксцедентах и удержаниях для логарифмически нормальных и нормальных распределений.

2. Нужно уметь уверенно интегрировать, используя подстановки и интегрирование по частям. Если не можете придумать, какую подстановку применить для упрощения интеграла, обычно подсказку можно найти в пределах.

3. Нужно уметь уверенно работать с условными вероятностями при нахождении средней суммы платежа, которую платит перестраховщик, подумайте, это средняя сумма по начальному иску или среднее по ненулевому иску.

4. Много экзаменационных вопросов комбинируют методы этой главы с моделями для совокупных исков, которые рассмотрим в части 3. Поэтому можно будет вернуться к тому, что сделано здесь, перед тем как идти дальше.

§3 Ответы на вопросы для самоподготовки

Решение 3.1

Сумма иска	Кем застраховано	A	B	R
£400.000	Company A	£300,000	-	£J100,000
£10,000	Company A	£7,500	-	£2,500
£250,000	Company B	-	£100,000	£150,000
£75,000	Company B	-	£75,000	£0
Total		£307,500	£175,000	£252,500

Решение 3.2

a) Нетто - сума, которую платит прямой страховщик, определяется функцией

$$h(x) = \begin{cases} \text{x} & \text{если} & & & \text{x} & \leqslant & £5{,}000 \\ 5{,}000 & \text{если} & £5{,}000 & < & \text{x} & \leqslant & £10{,}00 \\ \text{x}/2 & \text{если} & £10{,}000 & < & \text{x} & \leqslant & £20{,}000 \\ \text{x-10,000} & \text{если} & £20{,}000 & < & \text{x} & & \end{cases}$$

средняя сумма нетто-иска:

$$E[h(X)] = \int\limits_0^{5000} xf(x)dx + \int\limits_{5000}^{10000} 5000f(x)dx$$

$$+ \int\limits_{10000}^{20000} \frac{x}{2}f(x)dx + \int\limits_{20000}^{\infty} (x - 10000)f(x)dx$$

b) математическое ожидание $E([h(X)]^2)$ находится возведением в квадрат сумм в каждом интеграле

$$E([h(X)]^2) = \int\limits_0^{5000} x^2f(x)dx + \int\limits_{5000}^{10000} 5000^2f(x)dx$$

$$+ \int\limits_{10000}^{20000} \left(\frac{x}{2}\right)^2 f(x)dx + \int\limits_{20000}^{\infty} (x - 10000)^2f(x)dx$$

(Мы будем пользоваться таким видом вычислений для краткости - вычислять дисперсию суммы нетто-иска)

c) Перестраховщик должен делать платеж, как только сумма брутто-иска превысит $£5000$. Часть иска, превышающая $£5000$ - просто вероятность, что иск превзойдет $£5000$, которую можно найти, интегрируя функцию распределения вероятностей.

$$P(X > 5000) = \int\limits_{5000}^{\infty} f(x)dx$$

d) На графике видно, что сумма нетто-иска превышает £7500 всякий раз, когда сумма брутто-иска превышает £15000. Вероятность этого:

$$P(X > 15000) = \int\limits_{15000}^{\infty} f(x)dx$$

Решение 3.3

Для среднего используем формулу с $L = 0, U = \infty$ и $k = 1$:

$$E(X) = e^{\mu+1/2\sigma^2}[\phi(\infty) - \phi(-\infty)] = e^{\mu+1/2\sigma^2}$$

Для второго нецентрального момента используем те же значения L и U при $k = 2$:

$$E(X^2) = e^{2\mu+2\sigma^2}[\phi(\infty) - \phi(-\infty)] = e^{2\mu+2\sigma^2}$$

Тогда дисперсия:

$$Var(X) = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

Это формулы согласуются с обычными результатами

Решение 3.4

(a) Используя формулу при $k = 0$:

$$\int\limits_{1000}^{5000} f(x)dx$$

$$= \phi\left(\frac{\log 5000 - 7.5}{0.85}\right) - \phi\left(\frac{\log 1000 - 7.5}{0.85}\right)$$

$$= \phi(1.197) - \phi(-0.697) = 0.88435 - 0.24290 = 0.641$$

(b) Используя формулу при $k - 1$:

$$\int\limits_{0}^{1000} xf(x)dx$$

$$= e^{7.5+1/2\times 0.85^2}[\phi(\frac{\log 1000 - 7.5}{0.85} - 0.85) - \phi(-\infty)]$$

$$= e^{7.86125}[\phi(-1.547) - 0]$$

$$= 2,594.76 \times 0.06093 = 158.1$$

(c) Используя формулу при $k = 2$:

$$\int_{5000}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= e^{2(7.5)+2\times0.85^2}[\phi(\infty) - \phi(\frac{\log 5000 - 7.5}{0.85} - 2(0.85))]$$

$$= e^{16/445}(1 - \phi((-0.503))$$

$$= 2,594.76 \times 0.06093 = 158.1$$

$$= 13,866,688(1 - 0.30749) = 9.603$$

Решение 3.5

Поскольку страховщик и перестраховщик вместе платят полный иск, средние суммы, выплачиваемые перестраховщиком, находятся вычитанием:

Договор 1: $6,768 - 5,07 \ = 1,692$

Договор 2: $5,758 - 6,557 = 211$

По Договору 1 среднеквадратичное отклонение для сумм, которые платит перестраховщик

$0.25 \times 408 = 1,602$

По Договору 2, перестраховщик платит часть Y с превышением $25,000$ для каждого ущерба X, поэтому:

$$E(Y^2) = \int_{M}^{\infty} (x - M)^2 f_X(x) dx$$

$$= \int_{M}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - 2M \int_{M}^{\infty} x f_X(x) dx + M^2 \int_{M}^{\infty} f_X(x) dx$$

$$= e^{2\mu+2\sigma^2}[1 - \Phi(M_2) - 2Me^{\mu+1/2\sigma^2}[1 - \Phi(M_1)] + M^2[1 - \Phi(M_0)]$$

$$= 86,876,663[1 - \Phi(0.433)1 - 2(25,000)(6,768)[1 - \Phi(1.333)]$$

$$+(25,000)^2[1 - \Phi(2.033)]$$

$$= 5,217,100$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 5,217,100 - (211)^2 = (2,274)^2$$

Отметим, что по XOL, перестраховщику достается большая часть изменчивости в суммах иска. Среднеквадратичное отклонение $(2,274)$ иска перестраховщика, со средним 211, соразмерны значительно лучше, чем среднеквадратичное отклонение $(6,408)$ прямого иска со средним $6,768$.

Решение 3.6

Попробуем вычислить интеграл

$$I = \int_L^U x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Делаем замену $z = X - P$ (точно так же, как в предыдущем доказательстве), получаем :

$$I = \int_L^U (\mu + \sigma z)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

раскрываем:

$$I = \mu^2 \int_L^U \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2z^2} dz + 2\mu\sigma \int_L^U z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2z^2} dz +$$

$$\sigma^2 \int_L^U z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2z^2} dz$$

Первые два интеграла можно вычислить, используя результаты, полученные выше. Последний интеграл можно вычислить, используя интегрирование по частям:

$$\int_L^U z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-1/2z^2} dz = z \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-1/2z^2} \right) \Bigg|_L^U - \int_L^U \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2z^2} dz =$$

$$= -[U\Phi(U) - L(\Phi(L)] + \Phi(U) - \Phi(L)$$

Объединяя эти три интеграла, получаем:

$$\int\limits_L^U x^2 f_X(x)dx = \mu^2[\Phi(\frac{U-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{L-\mu}{\sigma})] - 2\mu\sigma[\Phi(\frac{U-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{L-\mu}{\sigma})] +$$

$$+\sigma^2\{[\Phi(\frac{U-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{L-\mu}{\sigma})] -$$

$$-[(\frac{U-\mu}{\sigma})\Phi(\frac{U-\mu}{\sigma}) - (\frac{L-\mu}{\sigma})\Phi(\frac{L-\mu}{\sigma})]\}$$

Решение 3.7

(a) если случайная величина иска равна X, то доля удержания равна $Y = \alpha X$. Тогда:

$$E(Y) = E(\alpha X) = \alpha E(X) = \alpha/\lambda$$

(b) Распределение исков будущего года kX, где $X \sim Exp(\lambda)$. Тогда доля удержания $Y = \alpha k X$, и:

$$E(Y) = E(\alpha k X) = \alpha k E(X) = \alpha k/\lambda$$

Решение 3.8

В конечном счете, дисперсия исков, сумма которых меньше 500, будет стремиться к нулю. Тогда страховщик будет платить 500 по каждому иску. Тогда предел $E(Y_n)$ при n стремящемся к бесконечности будет равен 500.

Решение 3.9

Если величина удержания не имеет предела, дисперсия оплаты иска – это просто дисперсия распределения Парето (3,19):

$$Var(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = \frac{3\times 10^2}{4\times 1} = 75$$

С конечным удержания, математическое ожидание квадрата оплаты иска:

$$E(Y^2) = \int\limits_0^8 x^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{a+1}}dx + \int\limits_8^\infty 8^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha + 1}dx$$

Мы можем прямо посчитать второй интеграл:

$$\int_8^\infty 8^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha+1}dx = 64\left[-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha\right]_8^\infty = 64\times\left(\frac{10}{1}8\right)^3 = 10.9739$$

Мы можем посчитать первый интеграл, сделав его полным и используя факт, что второй нецентральный момент в распределении Парето – $[E(X)]^2 + Var(X) = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$:

$$\int_0^8 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx = E(X^2) - 1\int_8^\infty 8^2\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha+1}dx$$

Заменяя $u = x - 8$:

$$\int_0^8 x^2\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx =$$

$$= E(X^2) - \int_0^\infty (u+8)^2\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx =$$

$$= E(X^2) - \left[\int_0^\infty u^2\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx + 16\int_0^\infty u\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx\right.$$

$$\left.+64\int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx\right] =$$

$$= \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)\alpha-2)} - \left[\left(\frac{10}{18}\right)^\alpha\int_0^\infty u^2\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx + 16\times\left(\frac{10}{18}\right)^\alpha\int_0^\infty u\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx+\right.$$

$$\left.64\times\left(\frac{10}{18}\right)^\alpha\int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx\right] =$$

$$= \frac{2\times 10^2}{2\times 1} - \left(\frac{10}{18}\right)^3\left[\frac{2\times 18^2}{2\times 1} + 16\times\frac{18}{2} + 64\times 1\right] = 8.78$$

Тогда: $E(Y^2) = 8.78 + 10.9739 = 19.753$

Тогда дисперсия Y:

$$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 19.75 - 3.4568^2 - 7.804$$

Решение 3.10

Если возмещение основного иска $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$, то возмещения перестраховщика имеют распределение $Y = 0.2X$. Делая замену $y = 0.2x$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha (5y)^{\alpha-1} e^{-5\lambda y} 5dy =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (5\lambda)^\alpha y^{\alpha-1} e^{-5\lambda y} dy$$

Это функция распределения вероятностей для распределения $Gamma(\alpha, 5\lambda)$, у которого среднее $\frac{\alpha}{5\lambda}$ и дисперсия $\frac{\alpha}{25\lambda^2}$. Но среднее и дисперсия выборки (знаменатель n) :

$\bar{\text{x}} = \frac{\Sigma x_i}{8} = \frac{101.2}{8} = 12.65$

и $s^2 = \frac{\Sigma x_i}{8} - \bar{\text{x}} = \frac{2119.02}{8} - 12.65^2 = 104.855$

Тогда уравнение для α и λ :

$\frac{\alpha}{5\lambda} = 12.65$ и $\frac{\alpha}{25\lambda^2} = 104.855$

Решив его, находим $\alpha = 1.526$ и $\lambda = -0.024$.

Решение 3.11

Необходимо найти распределение выплат по искам перестраховщика, у которого функция распределения вероятностей:

$$g(y) = \frac{f(y+M)}{1 - F(M)}$$

Функция распределения для распределения Вейбулла $F(x) = 1 - e^{-cx^2}$ Тогда:

$$g(y) = \frac{2c(y+M)e^{-c(y+M)^2}}{e^{cM^2}} = c(2y+6)e^{-c(y^2+6y)}$$

Тогда функция правдоподобия основывается на случайной выборке размера n :

$$L(c) = c^n \Pi(2y_i + 6) \times e{-}c\Sigma(y_i^2 + 6y_i)$$

логарифмируем:

$$\log L(c) = n \log c + \Sigma \log(2y_i + 6) - c\Sigma(y_i^2 + 6y_i)$$

дифференцируем по с:

$$\frac{\delta}{\delta c}\log L = \frac{n}{c} - \Sigma(y_i^2 + 6y_i)$$

приравниваем к нулю и решаем, получаем:
$\hat{c} = \frac{n}{\Sigma(y_i^2+6y_i)}$
Подставим числовые значения:
$\hat{c} = \frac{10}{92.3+6\times8.7} = 0.692$
Проверим, что это максимальное значение:

$$\frac{\delta^2}{\delta c^2}\log L = -\frac{n}{c^2}$$

Полученное выражение отрицательно при любом значении c. Поэтому это максимальное значение для функции правдоподобия

Решение 3.12

Если $E = 0$, по формуле получаем : $f_Y(y) = \alpha\lambda^\alpha(\lambda+y)^{-\alpha-1}, y > 0$, что то же самое, что исходное распределение убытков. Это верно, поскольку страховщик должен оплатить полный ущерб.

Аналогично, средняя сумма, выплачиваемая перестраховщиком, равна $\frac{\lambda}{\alpha-1}$, что соответствует среднему значению в распределении Pareto.

Решение 3.13

Без эксцедента, средняя сумма платежа страховщика по отношению к каждому предъявленному иску:

$$\int\limits_0^\infty x\alpha\lambda^\alpha(\lambda + x)^{-\alpha-1}dx = \frac{\lambda}{\alpha - 1}$$

(используем формулу для среднего значения распределения Pareto).

С эксцедентом E , средняя сумма платежа страховщика по отношению к каждому предъявленному иску :

$$\int\limits_E^\infty (x - E)\alpha\lambda^\alpha(\lambda + x)^{-\alpha-1}dx$$

Делаем замену $y - x - E$, то есть:

$$\int\limits_0^\infty yx\alpha\lambda^\alpha(\lambda + x + y)^{-\alpha-1}dy = (\frac{\lambda}{\lambda + E})^\alpha \int\limits_0^\infty yx\alpha\lambda^\alpha(\lambda + x + y)^{-\alpha-1}dy$$

$$= (\frac{\lambda}{\lambda + E})^{\alpha} \frac{\lambda + E}{\alpha - 1}$$

(используем формулу для среднего значения распределения $Pareto$ с параметром $\lambda + E$).

Итак, отношение рисковых премий будет:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + E}\right)^{\alpha} \frac{\lambda + E}{\alpha - 1} / \frac{\lambda}{\alpha - 1} = \frac{\lambda}{\lambda + E}^{\alpha - 1} = \left(\frac{5000}{5000 + 100}\right)^{2.5 - 1} = 0.971$$

т.е. уменьшится на 2.9%.

Решение 3.14

Распределение сумм, выплачиваемых страховщиком, как и раньше, равно $Y = X - E \mid X > E$

Таким образом:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(E + y)}{P(X > E)} = \frac{\lambda e^{-\lambda(E+y)}}{\int\limits_E^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{\lambda e^{-\lambda(E+y)}}{e^{-\lambda E}} = \lambda e^{-\lambda y}$$

Таким образом, нетто-сумма, выплачиваемая страховщиком, — тоже $Exp(\lambda)$ – распределение, так что среднее нетто-распределения также равно $\frac{1}{\lambda}$.