Глава 3

Перестрахование

Цели главы

К концу данной главы вы будете уметь:

- описывать основные виды перестрахования, используемые при общем страховании
- описывать принцип действия эксцедентного полиса
- выполнять простые вычисления, относящиеся к перестрахованию и эксцедентным полисам

§1 Введение

Перестрахование (reinsurance). Страховщики часто пользуются страховыми услугами других страховых компаний для того, чтобы предостеречь себя от различных случайностей, например, возможности возникновения слишком крупных исков. *Прямой страховщик (direct insurer)* – это страховщик, деятельность которого напрямую связана со страхователем. *Перестраховщик (reunsurer)*– это страховщик, который согласен принять часть риска, переданного прямому страховщику.

Прямой страховщик обязуется платить премии перестраховщику и принимать возмещения исков в случае, когда иски превышают допустимое значение в рамках договора перестрахования.

Перестрахование может действовать в соответствии с договором, согласно которому все риски из особой категории (например, небольшие административные здания в Лондоне) автоматически покрываются в соответствии с соглашением перестрахования (факультативно), таким образом, перестрахование каждого риска носит индивидуальных характер.

Премии и иски характеризуются как *нетто*, если они были установлены с учетом перестрахования, и *брутто* – если нет.

На практике, страховщик может иметь несколько договоров перестрахования, действующих одновременно.

Полисы общего страхования часто включают в себя франшизы, что означает, что страхователь сам должен оплатить определённую часть страхового возмещения до покрытия полного убытка.

В случае перестрахования или эксцедентных полисов должны быть установлены рисковые премии страховщика, т.к. страховщик не будет обязан выплачивать полную стоимость каждого убытка. Вот то, что мы будем обсуждать в этой главе.

Практические аспекты перестрахования изложены в Разделе G.

Основы теории этой главы охватывают расчеты, касающиеся индивидуального перестрахования эксцедента убытка, а также короткие параграфы о пропорциональном страховании и эксцедентных полисах.

§2 Типы перестрахования

Перестрахование может быть двух видов: пропорциональное и непропорциональное.

2.1 Пропорциональное перестрахование

Согласно договору пропорционального перестрахования, прямой страховщик и перестраховщик разделяют премии и величину каждого иска в определённых пропорциях. Например, в случае страхования конкретного здания от пожара прямой, страховщик может удержать 75% от премии и будет обязан оплатить 75% от каждого иска, как крупного, так и нет.

Пропорциональное страхование бывает двух видов:

- Квотный договор перестрахования, где пропорции (доли) одинаковы для всех рисков.

- Перестрахование на базе эксцедента суммы, где доли удержания варьируются от риска к риску.

2.2 Непропорцинальное перестрахование

Согласно договору непропорционального перестрахования, прямой страховщик выплачивает фиксированную премию перестраховщику.

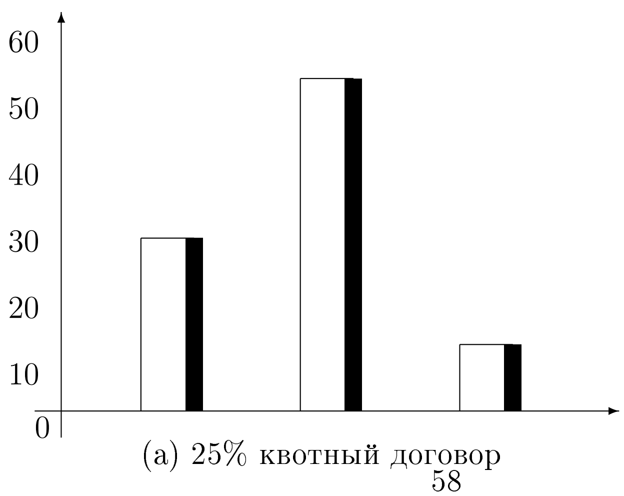
Единственное обязательство перестраховщика – производить платежи, когда часть величины иска попадает в отдельный уровень перестрахования (например, от £1m до £5m). Уровень определяется нижним пределом - *уровень собственного удержания (retention limit)* (например, £1m) и верхним пределом (например, £5m или "∞ если возмещение неограничено). Обычно, большинство исков удовлетворяются в полном размере прямым страховщиком.

Мы разберём два вида договоров непропорционального страхование:

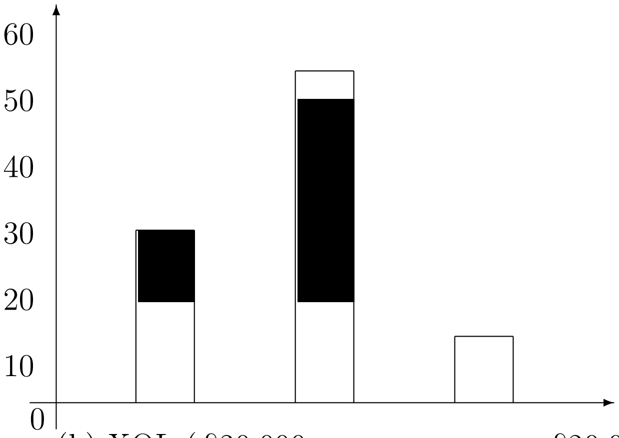
- Договор перестрахования *эксцедента убытка (excess of loss - XOL)*. Перестраховщик обязан производить выплаты, когда величина иска превзойдет определённую *точку эксцедента (excess point* или *retention)*. Например, перестраховщик может согласиться выплачивать долю превышения от каждого полиса автомобильного страхования, превышающего £50,000, но не больше определённого предела - £2,000,000.

- Договор перестрахования *эксцедента убыточности (stop loss)*. Перестраховщик обязан производить выплаты, если величина суммы всех исков определённой группы полисов превзойдёт конкретную величину (обычно выраженную в процентах от брутто-премии). Например, перестраховщик может согласиться оплачивать 90% от величины превышения, когда величина суммы исков для всех договоров автомобильного страхования превзойдёт 105% от общей брутто-премии, без верхнего предела.

Диаграммы ниже показывают величины выплат прямого страховщика и перестраховщика в случае (a) квотного договора и (b) XOL-договора с уровнем перестрахования £30,000 и уровнем превышения £20,000. Величины исков составляют £30,000, £55,000, £15,000. Тёмным цветом выделены выплаты, производимые перестраховщиком.



(a) 25% квотный договор



(b) XOL (£30,000 с превышением £20,000)

Вопрос для самоподготовки 3.1. Страховая компания A имеет квотный договор перестрахования, согласно которому перестраховщик R принимает 25% от каждого риска. Страховая компания B имеет договор перестрахования эксцедента убытка (XOL), по которому перестраховщик R оплачивает долю превышения каждого иска, превосходящего величину £200,000, но не более £100,000.
В течение одного месяца:

— Компании A были предъявлены иски на £400,000 и £10,000

— Компании B были предъявлены иски на £250,000 и £75,000

Какую сумму от каждого из этих исков выплатят A, B и R?

§3 Франшизы

Так как большинство страхователей обеспокоено главным образом возможностью больших потерь, многие страховые полисы включают *франшизы (policy excess)* (которые могут быть условными или безусловными со стороны страхователя), что означает, что страхователь сам должен оплатить определённую часть страхового возмещения до покрытия полного убытка. Страховщик оплачивает только часть убытка, превосходящую франшизу. Например, большинство полисов индивидуального автомобильного страхования включают обязательную франшизу в £50 или £100.

Когда величина суммы предъявленного иска оказывается меньше установленной франшизы, фактическая величина выплат страховщика равна нулю, что приводит к *нулевому иску (zero claim)*.

§4 Распределение нетто-исков

Мы можем находить моменты для величины нетто-суммы выплат для прямого страховщика или перестраховщика, рассматривая нетто-суммы, выплачиваемые по брутто-искам различных размеров.

Пример 3.1 Перестраховщик согласен производить следующие выплаты относительно индивидуальных исков, предъявленных прямому страховщику:

— ноль, если размер иска меньше £5,000

— величину превышения £5,000, если иск от £5,000 до £10,000

— половину величины иска, если его размер от £10,000 до £20,000

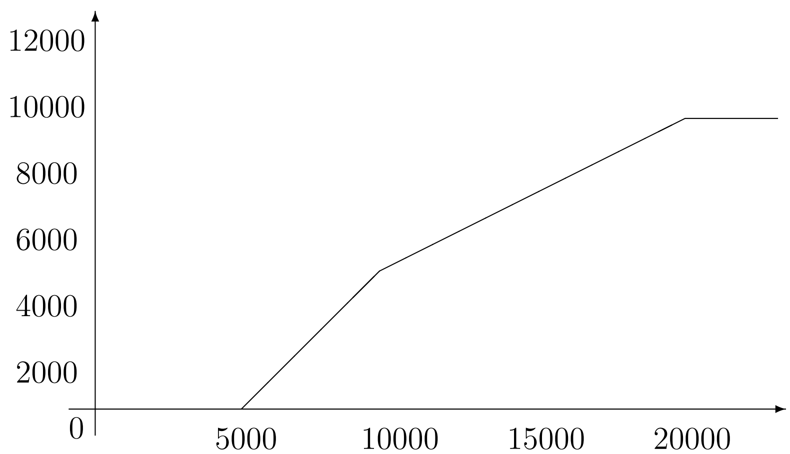
— £10,000, если величина иска превышает £20,000

Построить график, показывающий величину выплат перестраховщика для исков, предъявленных прямому страховщику.

Решение Выплаты перестраховщика могут быть описаны с помощью функции $g(x)$, где x - размер основного ика

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad x \leq 5,000 \\ x - 5,000 & \text{если} \quad 5,000 < x \leq 10,000 \\ x/2 & \text{если} \quad 10,000 < x \leq 20,000 \\ 10,000 & \text{если} \quad 20,000 < x \end{cases}$$

График этой функции имеет следующий вид:



Пример 3.2 Записать в интегральной форме выражение для среднего значения величины выплат перестраховщика из предыдущего примера, используя $f(x)$ для обозначения плотности распределения вероятностей величины основных исков.

Решение Среднее значение величины выплат перестраховщика – $E[g(X)]$,

где x обозначает величину брутто-иска и $g(x)$ - функция из предыдущего примера.
Значит:

$$E[g(X)] = \int_0^\infty g(x)f(x)dx$$

Для получения необходимого выражения, разобьём этот интеграл, рассматривая функцию $g(x)$ при различных значениях x. Получим:

$$E[g(X)] = \int_0^{5{,}000} 0f(x)dx + \int_{5{,}000}^{10{,}000} (x-5,000)f(x)dx +$$
$$+ \int_{10{,}000}^{20{,}000} \frac{x}{2}f(x)dx + \int_{2{,}000}^{\infty} 10,000dx$$

Упростим выражение, учитывая, что первый интеграл равен нулю:

$$E[g(X)] = \int_{5{,}000}^{10{,}000} (x-5,000)f(x)dx + \int_{10{,}000}^{20{,}000} \frac{x}{2}f(x)dx + \int_{2{,}000}^{\infty} 10,000dx$$

Вопрос для самоподготовки 3.2. Запишите в интегральной форме выражения для:

a) среднего значения величины возмещения основных исков для прямого страховщика

b) среднего значения квадрата величины выплат прямого страховщика относительно индивидуальных исков

c) доли основных исков, которую покрывает перестраховщик

d) части исков, когда нетто-сумма выплат прямого страховщика превосходит £7,500

Пример 3.3

(a) Показать, что если $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, то:

$$\int_L^U f(x)dx = e^{-\lambda L} - e^{-\lambda U}$$

и

$$\int_L^U xf(x)dx = \left(L + \frac{1}{\lambda}\right)\, e^{-\lambda L} - \left(U + \frac{1}{\lambda}\right)\, e^{-\lambda U}$$

(b) Исходя из этого, вычислить среднее ожидаемое нетто-суммы выплат прямого страховщика из Примера 3.1, если размеры основных исков описываются экспоненциальным распределением со средним £4,000.

Решение

(a) Первый результат следует из непосредственного интегрирования:

$$\int\limits_L^U \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_L^U = e^{-\lambda L} - e^{-\lambda U}$$

Второй результат может быть получен с помощью интегрирования по частям:

$$\int\limits_L^U x f(x) dx = x(-e^{-\lambda x})\Big|_L^U - \int\limits_L^U -e^{-\lambda x} dx =$$
$$= (L\ e^{-\lambda L} - U\ e^{-\lambda U}) + \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda L} - e^{-\lambda U}) =$$
$$= \left(L + \frac{1}{\lambda}\right)\ e^{-\lambda L} - \left(U + \frac{1}{\lambda}\right)\ e^{-\lambda U}$$

(b) Теперь можно применить эти формулы (со значением $\lambda = 1/4,000$) для вычисление среднего значения величины нетто-иска, интегральная форма которого дана в Решении 3.2(a):

$$E[h(X)] = \int\limits_0^{5{,}000} x f(x) dx + \int\limits_{5{,}000}^{10{,}000} 5,000 f(x) dx +$$
$$+ \int\limits_{10{,}000}^{20{,}000} \frac{x}{2} f(x) dx + \int\limits_{20{,}000}^{\infty} (x - 10,000) f(x) dx =$$
$$= (4,000 - 9,000\ e^{-1.25}) + 5,000(e^{-1.25} - e^{-2.5}) +$$
$$+ \frac{1}{2}(14,000\ e^{-2.5} - 24,000\ e^{-5}) + (24,000\ e^{-5} - 10,000\ e^{-5}) =$$
$$= 1,421.5 + 1,022.1 + 493.7 + 94.3 = 3,032$$

Существует множество удобных интегральных формул, которые упрощают вычисления, связанные с конкретными распределениями.

4.1 Логнормальное распределение

Следующее утверждение касается моментов логнормального распределения:

Свойство логнормального распределения
Если $f_X(x)$ – функция плотности распределения вероятностей для $LogNormal(\mu, \sigma^2)$ - распределения, то:

$$\int\limits_L^U x^k f_X(x)dx = e^{k\mu+\frac{1}{2}k^2\sigma^2}[\Phi(U_k) - \Phi(L_k)]$$

$$\text{где} \quad L_k = \frac{log(L) - \mu}{\sigma} - k\sigma \quad \text{и} \quad U_k = \frac{log(U) - \mu}{\sigma} - k\sigma$$

и $\Phi(z)$ - функция распределения для стандартного нормального распределения.

Доказательство:
Используя выражение для $f_X(x)$ и производя замену $t = \frac{log(x)-\mu}{\sigma}$, получим:

$$\int\limits_L^U x^k f_X(x)dx = \int\limits_L^U x^k \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}dx =$$

$$\int\limits_{L_k}^{U_k} e^{k(\mu+\sigma t+k\sigma^2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(t+k\sigma^2)^2}dt = \int\limits_{L_k}^{U_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{k\mu+k\sigma t+k^2\sigma^2}\ e^{-\frac{1}{2}t^2-k\sigma t-\frac{1}{2}k^2\sigma^2}dt =$$

$$e^{k\mu+\frac{1}{2}k^2\sigma^2}\int\limits_{L_k}^{U_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = e^{k\mu+\frac{1}{2}k^2\sigma^2}\ [\Phi(U_k) - \Phi(L_k)]$$

Если $L = 0$ или $U = 0$, эту формулу можно упростить, используя тот

факт, что $\Phi(-\infty) = 0, \quad \Phi(0) = 1/2, \quad \Phi(\infty) = 1$

Вопрос для самоподготовки 3.3. Найдите среднее и дисперсию, используя формулу, данную выше.

Вопрос для самоподготовки 3.4. Если $f(x)$ – функция плотности распределения $LogNormal(7.5, 0.85^2)$, вычислите:

$(a)\ \int\limits_{1{,}000}^{5{,}000} f(x)dx \qquad (b)\ \int\limits_{0}^{1{,}000} xf(x)dx \qquad (c)\ \int\limits_{5{,}000}^{\infty} x^2 f(x)dx$

Если в данной выше формуле положить $k = 1$, мы сможем найти среднее ожидаемое величины нетто-суммы исков, когда основные иски имеют логнормальное распределение.

Пример 3.4 Страховщик рассматривает два вида договоров перестрахования:

Договор 1: 25% квотный договор

Договор 2: договор перестрахования эксцедента убытка с бесконечным верхним пределом и уровнем собственного удержания 25,000.

Найти математическое ожидание величины нетто-выплат, производимых страховщиком:
(a) без перестрахования
(b) с перестрахованием по Договору 1
(c) с перестрахованием по Договору 2
при условии, что индивидуальные потери имеют логнормальное распределение с параметрами $\mu = 8.5$ и $\sigma^2 = 0.64$.

Решение

(a) Без перестрахования страховщик оплачивает каждый иск в полном объёме. Таким образом, математическое ожидание равно:

$$E[X] = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} = e^{8.5+\frac{1}{2}(0.64)} = 6,768$$

(b) По Договору 1 страховщик оплачивает 75% от каждого иска. Величина нетто-иска $X_1 = 0.75X$ и среднее:

$$E[X_1] = 0.75E[X] = 0.75 * 6,768 = 5,076$$

(c) По Договору 2 страховщик оплачивает 25,000 (обозначим уровень собственного удержания через M) от каждого иска X. Следовательно, величина нетто-иска $X_2 = \min(X, M)$. Используя формулу, приведённую выше (где $M_0 = (\log 25,000 - 8.5)/0.8 = 2.033$ и $M_1 = M_0 - 0.8 = 1.233$ задают скорректированные пределы), найдём среднее:

$$E[X_2] = \int\limits_0^M x f_X(x)dx + M \int\limits_M^\infty f_X(x)dx =$$
$$e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\ [\Phi(M_1) - \Phi(-\infty)] + M\ [\Phi(\infty) - \Phi(M_0)] =$$
$$6,768\ [\Phi(1.233)] + 25,000\ [1 - \Phi(2.033)] = 6,557$$

Если в этой формуле положить $k = 2$, можно найти второй нецентральный момент величины нетто-иска (следовательно, и дисперсию), если основные иски имеют логнормальное распределение.

Пример 3.5 Найти дисперсию величины нетто-суммы исков, выплачиваемых страховщиком
(a) без перестрахования
(b) с перестрахованием по Договору 1
(c) с перестрахованием по Договору 2,
используя условия предыдущего примера.

Решение

(a) Без перестрахования страховщик оплачивает каждый иск в полном размере. Дисперсия в этом случае равна:

$$Var[X] = e^{2\mu+\sigma^2}\ (e^{\sigma^2} - 1) = e^{2(8.5)+0.64}\ (e^{0.64} - 1) = (6,408)^2$$

(b) По Договору 1 страховщик оплачивает 75% от каждого иска. Величина нетто-иска $X_1 = 0.75X$ и дисперсия:

$$Var[X_1] = 0.75^2\ Var[X] = 0.75^2 * 6,408^2 = (4,806)^2$$

(c) По Договору 2 страховщик оплачивает 25,000 (обозначим уровень собственного удержания через M) от каждого иска X. Следовательно, величина нетто-иска $X_2 = \min(X, M)$. Используя формулу, приведённую выше ($M_0 = (\log 25,000 - 8.5)/0.8 = 2.033$ и $M_2 = M_0 - 2(0.8) = 0.433$), найдём второй нецентральный момент величины нетто-иска:

$$E[X_2^2] = \int_0^M x^2 f_X(x)dx + \int_M^\infty M^2 f_X(x)dx =$$

$$e^{2\mu+2\sigma^2}\ [\Phi(M_2 - \Phi(-\infty)] + M^2\ [\Phi(\infty) - \Phi(M_0)] =$$

$$86,876,663\ [\Phi(0.433)] + (25,000)^2\ [1 - \Phi(2.033)] = 71,135,800$$

Таким образом, дисперсия равна:

$$Var[X_2] = E[X_2^2] - (E[X_2])^2 = 71,135,800 - (6,557)^2 = (5,304)^2$$

Вопрос для самоподготовки 3.5. Найдите математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение величины исков, выплачиваемых перестраховщиков в каждом из этих трёх случаев.

4.2 Нормальное распределение

Похожая формула может быть получена для первого момента и в случае нормального распределения:

Свойство нормального распределения
Если $f_X(x)$ – функция плотности распределения вероятностей для $N(\mu, \sigma^2)$ - распределения, то:

$$\int\limits_L^U x f_X(x) dx = \mu \ [\Phi(U') - \Phi(L')] - \sigma \ [\phi(U') - \phi(L')]$$

$$\text{где} \quad L' = \frac{L-\mu}{\sigma} \quad \text{и} \quad U' = \frac{U-\mu}{\sigma}$$

и $\phi(z)$ и $\Phi(z)$ - соответственно плотность распределения и функция распределения для стандартного нормального распределения.

Доказательство:
Используя выражение для $f_X(x)$ и производя замену $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, получим:

$$\int\limits_L^U x f_X(x) dx = \int\limits_L^U x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =$$

$$\int\limits_{L'}^{U'} (\mu + \sigma z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{1}{2}z^2} dz =$$

$$\mu \int\limits_{L'}^{U'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \sigma \int\limits_{L'}^{U'} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{1}{2}z^2} dz =$$

$$\mu \ P(L' < N(0,1) < U') + \sigma \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{1}{2}z^2} \right) \Bigg|_{L'}^{U'} =$$

$$\mu \ [\Phi(U') - \Phi(L')] - \sigma \ [\phi(U') - \phi(L')] =$$

$$\mu \ [\Phi\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)] - \sigma \ [\phi\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)]$$

Если $L = -\infty$ или $U = \infty$, то эту формулу можно упростить, используя

тот факт, что $\phi(-\infty) = \phi(\infty) = 0$

Вопрос для самоподготовки 3.6. Найдите выражение для $\int\limits_L^U x^2 f_X(x)dx$, где $f_X(x)$ – функция плотности распределения вероятностей $N(\mu,\sigma^2)$ - распределения.

Если договор эксцедента убытка имеет верхний предел – полученные выражения усложняются, но основной подход остаётся прежним.

Пример 3.6 Найти математическое ожидания и дисперсию величины выплат страховщика в Примере 3.5 в случае перестрахования по Договору 2 с некоторыми поправками: покрытие по этому договору имеет нижний предел 25,000 и верхний предел 50,000, и доля превышения иска верхнего предела переходит в обязательство страховщика.

Решение Величина выплат страховщика определяется теперь так:

$$X_2 = \begin{cases} X & \text{если} \quad X < M \\ M & \text{если} \quad M \le x < R \\ X-(R-M) & \text{если} \quad x \ge R \end{cases} \quad \text{где } M = 25,000 \text{ и } R = 50,000.$$

Таким образом, математическое ожидание X_2:

$$E[X_2] = \int\limits_0^M x f_X(x)dx + M\int\limits_M^R f_X(x)dx + \int\limits_R^\infty (x-R+M)f_X(x)dx =$$

$$\int\limits_0^M x f_X(x)dx + M\int\limits_M^R f_X(x)dx + \int\limits_R^\infty x f_X(x)dx - (R-M)\int\limits_R^\infty f_X(x)dx$$

Используя результаты, полученные выше (с $M_0 = 2.033$ и $M_1 = 1.233$), и положив $R_0 = \frac{\log 50,000 - 8.5}{0.8} = 2.900$ и $R_1 = R_0 - 0.8 = 2.100$, получим:

$$E[X_2] = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\ [\Phi(M_1)-\Phi(-\infty)] + M\ [\Phi(R_0)-\Phi(M_0)]+$$
$$e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\ [\Phi(\infty)-\Phi(R_1)] - (R-M)\ [\Phi(\infty)-\Phi(R_0)] =$$
$$6,768\ [\Phi(1.233)] + 25,000\ [\Phi(2.900)-\Phi(2.033)]+$$
$$6,768\ [1-\Phi(2.100)] - 25,000\ [1-\Phi(2.900)] = 6,585$$

4.3 Условное распределение исков

Пока нас интересовали только выплаты страховщика и перестраховщика, выраженные как среднее по общему количеству исков. Считая ожидаемые выплаты перестраховщика, мы объединяли все иски, включая те, по которым перестраховщик выплат не совершал, т.е. те, что оказывались ниже предела удержания эксцедента убытка.

Однако, перестраховщика больше интересуют ненулевые иски, т.е. иски, по которым фактически осуществляются выплаты. В самом деле, перестраховщик может вовсе не знать об остальных исках, т.к. страховщик мог просто не предоставить ему соответствующей информации.

Положим, что основные иски рассматриваются как наблюдения случайной величины X, и что договор эксцедента убытка включает предел удержания M. Тогда, считая, что мы рассматриваем все иски, выплаты страховщика (I) и перестраховщика (R) равны:

$$\mathrm{I} = \begin{cases} X & \text{если} \quad X \leq M \\ M & \text{если} \quad X > M \end{cases} \qquad \mathrm{R} = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad X \leq M \\ X - M & \text{если} \quad X > M \end{cases}$$

Мы можем найти распределения случайных величин (вместе с их математическими ожиданиями и дисперсиями), при условии, что нам известно распределение X.

Теперь предположим, с точки зрения перестраховщика, что нас интересует распределение только тех исков, по которым совершаются выплаты. Тогда мы знаем, что эти иски превышают величину M. Итак, случайная величина, которая нас интересует, – есть условная случайная величина:

$$R = X - M | X > M$$

Вообще говоря, эта случайная величина будет иметь не такое распределение, как случайная величина R выше. Мы можем найти её плотность распределения, рассматривая $P(R < r)$:

$$P(R < r) = P(X < r + M | X > M) = \frac{P(M < X < r + M)}{P(X > M)} =$$

$$\int\limits_{M}^{r+M} \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} dx = \frac{F_X(r + M) - F_X(M)}{1 - F_X(M)}$$

Дифференцируя по r, получим функцию плотности распределения случайной величины R:

$$f_R(r) = \frac{f_X(r + M)}{1 - F_X(M)}$$

В следующем примере рассматривается условная случайная величина, т.к. нас интересуют иски выше уровня превышения. Будьте внимательны, отвечая на экзаменационные вопросы, уточняя, распределение условных или неусловных случайных величин требуется найти. Ключевым вопросом является: "Включаем ли мы нулевые иски?".

Пример 3.7 Найти плотность распределения величины выплат страховщика, если задана франшиза E, и если основные иски имеют Парето-распределение с функцией плотности распределения
$f_X(x) = \alpha\lambda^\alpha(\lambda + x)^{-\alpha-1}, x > 0$.
После этого найти среднее значение выплат страховщика (для исков, по которым страховщик осуществляет выплаты).

Решение Страховщик выплачивает $X - E$ от каждого иска X, превышающего E, и ноль - в противном случае. Итак, если Y определяет величину выплат страховщика, мы должны найти плотность величины $Y = X - E$, учитывая, что $X > E$. Так как нетто-сумма исков y страховщика соответствует величине брутто-иска $E + y$, то:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(E+y)}{P(X>E)} = \frac{\alpha\lambda^\alpha(\lambda+E+y)^{-\alpha-1}}{\int\limits_E^\infty \alpha\lambda^\alpha(\lambda+x)^{-\alpha-1}dx} =$$

$$\frac{\alpha\lambda^\alpha(\lambda+E+y)^{-\alpha-1}}{\lambda^\alpha(\lambda+E)^{-\alpha}}$$

Следовательно, плотность распределения нетто-выплат страховщика равна:

$$f_Y(y) = \alpha(\lambda+E)^\alpha(\lambda+E+y)^{-\alpha-1}, y > 0$$

Мы получили Парето-распределение с параметром $\lambda + E$.
Используя формулу для среднего значения в случае Парето-распределения, найдём среднее нетто-выплат стаховщика (для ненулевых исков):

$$E[Y] = \frac{\lambda+E}{\alpha-1}$$

Аналогичные рассуждения проводятся в случае убытков (имеющих Парето-распределение), превышающих предел удержания при перестраховании.

4.4 Инфляция

Мы детально рассмотрим влияние инфляции на действие каждого договора перестрахования.

Вопрос для самоподготовки 3.7. Предположим, что иски из страхового портфеля имеют $Exp(\lambda)$–распределение. Действует договор пропорционального перестрахования с долей удержания (квотой), равной α. Определите ожидаемы выплаты страховщика:

(a) на данный момент

(b) если размеры исков в следующем году увеличатся под действием инфляции с коэффициентом k.

Влияние инфляции на результат действия договора перестрахования эксцедента убытка может быть не столь очевидна.

Пример 3.8 Пусть иски из страхового портфеля имеют *Pareto*(α,λ)–распределение. В году 0 параметры $\alpha = 6, \lambda = 1,000$. Действует договор перестрахования эксцедента убытка с пределом удержания 500. Уровень инфляции не изменяется и равен 10%.

(i) Найти распределение выплат страховщика в году 1 и 2 без перестрахования.

(ii) Найти, во сколько раз увеличится среднее значение нетто-выплат страховщика (для каждого года).

Решение

(i) Пусть X_0 – размер иска в году 0 без учёта перестрахования. X_0 имеет *Pareto*(6,1000)–распределение, и $X_1 = kX_0$ – размер иска в году 1 без перестрахования (где $k = 1.1$). Для того, чтобы найти распределение X_1, положим $y = kx$ в интеграле для плотности распределения:

$$1 = \int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx = \int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+y/k)^{\alpha+1}}\frac{dy}{k} = \int_0^\infty \frac{\alpha(k\lambda)^\alpha}{(k\lambda+y)^{\alpha+1}}dy$$

Получили распределение $X_1 \sim$ *Pareto*$(\alpha, k\lambda)$, следовательно, распределение исков в году 1 – *Pareto*(6,1100), а в году 2 – *Pareto*(6,1210)

(ii) Средняя величина выплат страховщика в году 0 после договора перестрахования, $E[Y_0]$, равна:

$$E[Y_0] = \int_0^{500} x\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx + 500\int_{500}^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx$$

Первый интеграл можно найти, зная значение полного интеграла (математическое ожидание в случае *Pareto*–распределения):

$$\int_0^{500} x\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx = \frac{\lambda}{\alpha-1} - \int_{500}^\infty x\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx$$

Выполним замену $u = x - 500$:

$$\int\limits_{500}^{\infty} x\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}dx = \int\limits_{0}^{\infty} (u + 500)\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}}du =$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} u\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}}du + 500\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}}du =$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+500}\right)^\alpha \int\limits_{0}^{\infty} u\frac{\alpha(\lambda+500)^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}}du + 500\left(\frac{\lambda}{\lambda+500}\right)^\alpha \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\alpha(\lambda+500)^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}}du$$

Теперь первый интеграл – есть математическое ожидание $Pareto(\alpha, (\lambda+500))$-распределения, а второй – это область под функцией плотности такого же распределения. Следовательно:

$$\int\limits_{0}^{500} x\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}dx = \frac{\lambda}{\alpha - 1} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+500}\right)^\alpha \frac{\lambda+500}{\alpha-1} - 500\left(\frac{\lambda}{\lambda+500}\right)^\alpha$$

Выполняя аналогичную замену для второго интеграла, получим:

$$\int\limits_{500}^{\infty} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}dx = 500\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}}du = 500\left(\frac{\lambda}{\lambda+500}\right)^\alpha$$

Отсюда получаем:

$$E[Y_0] = \frac{\lambda}{\alpha - 1} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+500}\right)^\alpha \frac{\lambda+500}{\alpha-1}$$

Подставляя значения $\lambda = 1,000, \alpha = 6$, находим $E[Y_0] = 173.66$.
Среднее значение выплат в последующие годы может быть получено с помощью замены λ на $k\lambda$ в полученной выше формуле. Таким образом, в году 1:

$$E[Y_1] = \frac{1100}{5} - \left(\frac{1100}{1600}\right)^6 \frac{1600}{5} = 186.21$$

в году 2:

$$E[Y_2] = \frac{1210}{5} - \left(\frac{1210}{1710}\right)^6 \frac{1710}{5} = 199.07$$

Среднее значение выплат страховщика от года 0 к году 1 увеличилось на 7.2%, от года 1 к году 2 – на 6.9%.

Вопрос для самоподготовки 3.8. Найдите предел значения $E[Y_n]$, если n устремить к бесконечности.

4.5 Вычисление неполных интегралов

Одной из основных проблем вычисления средних и дисперсий в случае договора перестрахования эксцедента убытка является возникновение неполных интегралов, т.е. интегралов, пределы которых не определяют полный диапазон подходящего распределения. Иногда эту проблему можно решить, используя следующий метод.

Предположим, что имеется договор эксцедента убытка с уровнем удеражния M. Тогда величина иска Y, которую страховщик удерживает, равна:

$$Y = \begin{cases} X & \text{если} \quad X \leq M \\ M & \text{если} \quad X > M \end{cases}$$

Математическое ожидание Y равно:

$$E[Y] = \int\limits_0^M x f_X(x)dx + M\int\limits_M^\infty f_X(x)dx$$

Представим первый интеграл в виде разности двух интегралов:

$$E[Y] = E[X] - \int\limits_M^\infty x f_X(x)dx + M\int\limits_M^\infty f_X(x)dx = E[X] - \int\limits_M^\infty (x-M) f_X(x)dx$$

Выполним замену $u = x - M$:

$$E[Y] = E[X] - \int\limits_0^\infty u f_X(u+M)du$$

Мы получили выражение математического ожидания $E[Y]$, в которое входят только полные интегралы. Теперь мы без труда можем оценить это выражение.

Пример 3.9 Риски из страхового портфеля имеют $Pareto(\alpha, \lambda)$-распределение, где $\alpha = 3$, $\lambda = 10$. Найти среднее значение величины выплат страховщика в двух случаях: когда предел удержания равен 8, когда удержание не имеет предела.

Решение С бесконечным пределом удержания среднее значение выплат страховщика – есть математическое ожидание $Pareto(3, 10)$-распределения:

$$E[Y] = \frac{10}{3-1} = 5$$

Если предел удержания равен 8, используя формулу, приведённую выше, а также формулу для функции плотности *Pareto*-распределения, найдём среднее значение:

$$E[Y] = E[X] - \int_0^\infty u f_X(u+M)du = 5 - \int_0^\infty u \frac{3*10^3}{(u+18)^4}du$$

Вынося коэффициент за знак интеграла, мы можем привести этот интеграл к виду математического ожидания $Pareto(3,18)$-распределения:

$$E[Y] = 5 - \left(\frac{10}{18}\right)^3 \int_0^\infty u \frac{3*18^3}{(u+18)^4}du = 5 - \left(\frac{10}{18}\right)^3 \frac{18}{2} = 3.4568$$

Итак, установление предела удержания, равного 8, уменьшило среднее значение выплат с 5 до 3.46.

Вопрос для самоподготовки 3.9. Найдите дисперсию величины выплат страховщика с установленным и бесконечным пределом удержания.

4.6 Оценивание

Мы можем применять оба способа оценивания параметров в тех случаях, когда речь идёт о распределениях, применяющихся в перестраховании:

- метод моментов

- метод максимального правдоподобия.

Вопрос для самоподготовки 3.10. Следующие величины представляют собой случайную выборку выплат перестраховщика согласно договору пропорционального перестрахования:

$$4.6,\ 6.8,\ 22.9,\ 1.4,\ 3.8,\ 10.2,\ 19.4,\ 32.1$$

Если величина основных исков имеет $Gamma(\alpha, \lambda)$-распределение и доля удержания равна 80%, найдите оценку для параметров α и λ, используя метод моментов.

Вопрос для самоподготовки 3.11. Иски страхового портфеля описываются следующей функцией распределения $f(x) = 2cxe^{-cx^2},\ x \geq 0$. Имеется договор эксцедента убытка индивидуального перестрахования с уровнем удержания $M = 3$. О случайной выборке величин выплат перестраховщика известно:

$$n = 10 \qquad \sum y_i = 8.7 \qquad \sum y_i^2 = 92.3$$

Найдите оценку параметра c методом максимального правдоподобия.

Вопрос для самоподготовки 3.12. Проверьте, что формула, приведённая в Примере 3.7, остаётся верной, когда $E = 0$.

Вопрос для самоподготовки 3.13. Найдите отношение рисковых премий с эксцедентом £100 и без него, если основные иски имеют *Pareto*-распределение, где $\alpha = 2.5, \ \lambda = 5,000$.

Вопрос для самоподготовки 3.14. Если основные убытки из рискового портфеля имеют $Exp(\lambda)$-распределение, эксцедент равен E, какое распределение имеет величина нетто-суммы выплат страховщика и какого его среднее значение?