Приложение 5

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Мы не ставим здесь цели напомнить известные стандартные формулы и методы, но указываем те из них, которые могут быть менее привычны для студентов-актуариев.

Интегральное исчисление.

Если
$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx,$$
то
$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx + f(\beta(t),t)\,\frac{d}{dt}\,\beta(t) - f(\alpha(t),t)\,\frac{d}{dt}\,\alpha(t).$$

Исчисление конечных разностей.

(a) Операторы сдвига:
$$\mathrm{E}[f(x)] = f(x+1).$$

(b) Операторы конечных разностей:
$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = (\mathrm{E}-1)f(x).$$

(c) Кратные операторы конечных разностей:
$$\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)] = (\mathrm{E}-1)^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n (-1)^{n-k} f(x+k).$$

(d) Оператор конечных разностей, примененный к произведению:
$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).$$

(e) Обратный к разностному оператору:
если $\Delta f(x) = g(x)$, то $\Delta^{-1} g(x) = f(x) + w(x)$, где $w(x) = w(x+1)$.

Приложения.

(a) Представление полинома (формула Ньютона). Пусть $p_n(x)$ — полином степени n. Тогда
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^{x-a} \Delta^k p_n(a).$$

(b) Суммирование рядов:
если $\Delta F(x) = f(x)$, то
$$\begin{aligned} f(1) &= F(2) - F(1),\\ f(2) &= F(3) - F(2),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f(n) &= F(n+1) - F(n),\\ \sum_{x=1}^{n} f(x) &= F(n+1) - F(1) = \Delta^{-1} f(x)\Big|_1^{n+1}. \end{aligned}$$

(c) Суммирование по частям:
$$\sum_{x=1}^{n} g(x)\Delta f(x) = f(x)g(x)\Big|_1^{n+1} - \Delta^{-1}[f(x+1)\Delta g(x)]\Big|_1^{n+1}.$$

[Доказательство: просуммируйте обе части равенства для $\Delta[f(x)g(x)]$ по x от 1 до n.]

Распределения вероятностей

Дискретные распределения	Функция распределения	Ограничения на параметры	Производящая функция моментов $M(s)$	Моменты	
				Среднее	Дисперсия
Биномиальное	$C_x^n p^x q^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$	$0 < p < 1$, $q = 1 - p$	$(pe^s + q)^n$	np	npq
Бернулли	частный случай $n = 1$				
Отрицательное биномиальное	$C_x^{r+x-1} p^r q^x$, $x = 0, 1, \ldots$	$0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $r > 0$	$\left(\frac{p}{1 - qe^s}\right)^r$, $qe^s < 1$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Геометрическое	частный случай $n = 1$				
Пуассона	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$	$\lambda > 0$	$e^{\lambda(e^s - 1)}$	λ	λ
Равномерное	$\frac{1}{n}$, $x = 1, \ldots, n$	n положительное целое	$\frac{e^s(1 - e^{sn})}{n(1 - e^s)}$, $s \neq 0$ 1, $s = 0$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2 - 1}{12}$

Непрерывные распределения	Плотность распределения	Ограничения на параметры	Производящая функция моментов $M(s)$	Моменты	
				Среднее	Дисперсия
Равномерное	$\frac{1}{b-a}$, $a < x < b$	—	$\frac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}$, $s \neq 0$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Нормальное	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, $-\infty < x < \infty$	$\sigma > 0$	$\exp\left(\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right)$	μ	σ^2
Гамма-распределение	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$, $x > 0$	$\alpha > 0$, $\beta > 0$	$\left(\frac{\beta}{\beta - s}\right)^\alpha$, $s < \beta$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
Показательное	частный случай $\alpha = 1$				
Хи-квадрат	частный случай $\alpha = \frac{k}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$	k — положительное целое			
Обратное гауссовское	$\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}} x^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\beta x - \alpha)^2}{2\beta x}\right]$, $x > 0$	$\alpha > 0$, $\beta > 0$	$\exp\left[\alpha\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2s}{\beta}}\right)\right]$, $s < \frac{\beta}{2}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
Парето	$\alpha \frac{x_0^n}{x^{\alpha+1}}$, $x > x_0$	$x_0 > 0$, $\alpha > 0$		$\frac{\alpha x_0}{\alpha - 1}$, $\alpha > 1$	$\frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$, $\alpha > 2$
Логнормальное	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}\right]$, $x > 0$	$-\infty < m < \infty$, $\sigma > 0$		$e^{m+\sigma^2/2}$	$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2m+\sigma^2}$