

АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА

ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ И СООТНОШЕНИЯ

Оглавление

1. Международная актуарная нотация	3
Принципы нотации	3
Финансовые обозначения	3
2. Демографические события	5
Очевидные соотношения	5
Описание времени жизни: функция дожития и кривая смертей.....	5
Интенсивность смертности	6
Ожидаемая продолжительность жизни	6
Селективные и окончательные таблицы.....	7
3. Аналитические законы смертности.....	7
Простейшее приближение Муавра	7
Закон Гомперца.....	8
Закон Мейкхайма	8
Закон Пека	9
Закон Вейбулла	9
4. Интерполяция таблиц смертности между целочисленными возрастами	10
Линейная интерполяция	10
Гипотеза постоянства силы смертности.....	10
Гипотеза Балдуччи	10
5. Страховые ренты, аннуитеты и соотношения между ними	11
Базовое уравнение	11
Страховое дисконтирование.....	11
<i>m</i> -кратные страховые ренты	11
Возрастающие и убывающие аннуитеты	12
6. Программы страхования: расчет премий и выплат	12
Программа 1 чистое дожитие (pure endowment).....	12
Программа Пожизненное страхование, оплаченное к сроку $x + n$	13

Программа страхования жизни на случай смерти в течение n лет, выплата в конце года смерти, единовременный взнос	13
Программа пожизненное страхование, единовременный взнос, выплата в конце года смерти.....	13
Приведенная пожизненная пенсия (рента):	13
2. Отложенная срочная пенсия (рента):	14
3. Ежегодный в течение n лет взнос, пенсия k лет	14
4. Ежегодный взнос в отложенную срочную страховую ренту, пренумерандо ...	14
Рекуррентные формулы для вычисления страховых премий	14
7. Резервы	15
Перспективный (проспективный) метод.....	15
Ретроспективный метод.....	15
Рекуррентная формула резервов	16
Выражение резерва через аннуитеты:.....	16
8. Прогнозирование и оценка денежных потоков	16
Прибыль от смертности.....	16
Анализ потока прибыли (<i>вектора прибыли</i>)	17
Показатели таблиц смертности	18
Селективные таблицы смертности $l[x]$	20
Селективные таблицы смертности $d[x]$	21
Селективные таблицы смертности $q[x]$	22
Страховые аннуитеты 4%	23
Страховые аннуитеты 4%, селективные.....	24
Страховые аннуитеты 6%	25
Страховые аннуитеты 6%, селективные.....	26

□ □ □

1. Международная актуарная нотация

Принципы нотации

Центральное гнездо означает:

l – относительное число живущих

d – относительное число умерших

p – вероятность прожить, не умерев

q – вероятность умереть

μ – сила, интенсивность смертности

m – средняя смертность (*central death rate*)

a – аннуитет, современная стоимость потока платежей

s – будущая стоимость накоплений

e – ожидаемая продолжительность жизни (*expectation of life*)

A – нетто-ставка взноса по страхованию жизни (*present value of assurance*)

E – современная стоимость эндаумент фонда

P – годовая премия

π – некоторые специальные виды премий

V – резерв, оплаченная часть полиса

W – сумма к выплате, выкупная сумма

Индекс x внизу справа означает возраст вступления в договор

Индекс n внизу слева означает срок действия договора

Объединенный индекс внизу справа $x:n$ с уголком тоже означает возраст вступления в договор и срок действия договора

Двоеточие над центральным символом означает пренумерандо.

Черта над центральным символом означает непрерывное начисление.

Индекс (m) вверху справа означает m платежей в год

Индекс 1 вверху справа единовременный взнос

Индекс $m|$ внизу слева означает отсрочку на m лет

Индекс t внизу слева означает «на конец года t »

Финансовые обозначения

i – ставка процента

v – коэффициент дисконтирования

$$v = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

d – ставка дисконта

$$d = iv = 1 - v$$

δ – сила роста ставка процента

$$\delta = \ln(1 + i) = -\ln(1 - d)$$

$i^{(m)}$ – номинальная ставка процента при начислении m раз в год

$$i^{(m)} = m(\sqrt[m]{1 + i} - 1)$$

$$i^{(m)} = m\left((1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

$a_{n|}$ – современная стоимость потока платежей, постнумерандо

$$a_{n|} = v + v^2 + \dots + v^n = \frac{v(1 - v^n)}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{i}$$

$\ddot{a}_{n|}$ – современная стоимость потока платежей, пренумерандо

$$\ddot{a}_{n|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}$$

$s_{n|}$ – будущая стоимость потока накоплений, постнумерандо

$$s_{n|} = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$\ddot{s}_{n|}$ – современная стоимость потока платежей, пренумерандо

$$\ddot{s}_{n|} = (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^n = (1 + i) \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{d}$$

m -кратная рента пренумерандо:

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \frac{1 - v^n}{1 - v^{1/m}}$$

□

2. Демографические события

Очевидные соотношения

$$l_{x+1} = l_x - d_x$$

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

$$l_x = d_x + d_{x+1} + \dots + d_\omega$$

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n} = \sum_{t=x}^{x+n-1} d_t$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

$$p_x = 1 - q_x$$

$$p_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x \approx \frac{D_x}{N}$$

$$D_x \approx q_x \cdot N$$

Описание времени жизни: функция дожития и кривая смертей

Функция дожития – показывает вероятность того, что человек доживет до возраста x лет – т. е. умрет после возраста x лет:

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) \equiv s(x)$$

$$s(x) = 1 - F(X \leq x) = P(X \geq x)$$

Кривая смертей

$$f(x) = F'(x) = -s'(x)$$

Функция дожития как доля живых в одном поколении

$$\frac{l_x}{l_0} \approx s(x)$$

Связь относительного числа живущих и функции дожития

$$l_x = l_0 s(x)$$

Вероятность человека в возрасте x прожить еще в течение предстоящих t лет

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{\frac{l_{x+t}}{l_0}}{\frac{l_x}{l_0}} = s_x(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

Вероятность человека в возрасте x умереть течение предстоящих t лет

$${}_t q_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = 1 - {}_t p_x = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}$$

Вероятность человека в возрасте x умереть между $x + t$ и $x + t + u$

$${}_{t|u}q_x = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_x} = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)}$$

Интенсивность смертности

$$\mu_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{{}_tq_x}{t} = -\frac{s'(x)}{s(x)}$$

Доля живущих в возрасте x в зависимости от характера функции интенсивности смертности

$$s(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_t dt\right)$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \approx \mu_x$$

Ожидаемая продолжительность жизни

Средняя ожидаемая продолжительность жизни (*expectation of life or average afterlife-time*)

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \dots + l_\omega}{l_x}$$

То же:

$$e_x = \frac{d_{x+1} + 2 d_{x+2} + 3 d_{x+3} + \dots}{l_x} = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\omega-k} k d_{x+k}$$

Полная ожидаемая продолжительность жизни

$$e_x^0 \equiv M[T_x] = \int_0^\infty P(X > x) dt = \frac{1}{s(x)} \int_x^\infty s(t) dt$$

Связь между полной и средней продолжительностью жизни

$$e_x^0 = e_x + 0,5$$

The central death-rate for the year of age x to $x + 1$

$$m_x = d_x \left(\int_0^1 l_{x+t} dt \right)^{-1}$$

□

Селективные и окончательные таблицы

Пусть r - период отбора, тогда

$${}_r p_{[x]} l_{[x]} = l_{[x]+r} = l_{x+r}$$

Для $r = 2$:

$${}_2 p_{[x]} l_{[x]} = l_{[x]+2} = l_{x+2}$$

□

3. Аналитические законы смертности

Простейшее приближение Муавра

1729

Кривая смертей

$$f(x) = \frac{1}{\omega} \text{ при } 0 < x < \omega,$$

Интегральная функция смертности

$$F(x) = \frac{x}{\omega} \text{ при } 0 < x < \omega,$$

Функция дожития

$$s(x) = 1 - \frac{x}{\omega} \text{ при } 0 < x < \omega$$

Интенсивность смертности

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x} \text{ при } 0 < x < \omega$$

Средняя продолжительность жизни по Муавру

$$\overset{0}{e}_0 = \int_0^{\omega} S(x) dx = \frac{\omega}{2}$$

Момент второго порядка 2A по Муавру

$$EX^2 = 2 \int_0^{\omega} x \left(1 - \frac{x}{\omega}\right) dx = \frac{\omega^2}{3}$$

Стандартное отклонение по Муавру

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{12}, \quad \sigma = \frac{\omega}{2\sqrt{3}}$$

□

Закон Гомперца

1825

Моделирование интенсивности смертности экспоненциальной функцией надежности

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = B e^{ax}, \quad x > 0$$

Функция дожития:

$$s(x) = e^{-B \frac{(e^{ax}-1)}{a}} = \exp\left(-\frac{B}{a}(e^{ax} - 1)\right)$$

Интегральная функция смертности

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{B}{a}(e^{ax} - 1)\right)$$

Кривая смертей

$$f(x) = B \exp\left(ax - \frac{B}{a}(e^{ax} - 1)\right)$$

Закон Мейкхайма

1860

Обобщение модели Гомперца

$$\mu_x = A + B e^{ax} = A + B e^{ax}, \quad x > 0$$

Параметр A – фоновый уровень смертей от несчастных случаев.

Функция дожития:

$$s(x) = e^{-Ax - \frac{B(e^{ax}-1)}{a}} = \exp\left(-Ax - \frac{B}{a}(e^{ax} - 1)\right)$$

Интегральная функция смертности

$$F(x) = 1 - \exp\left(-Ax - \frac{B}{a}(e^{ax} - 1)\right)$$

Кривая смертей

$$f(x) = (A + B e^{ax}) \exp\left(-Ax - \frac{B}{a}(e^{ax} - 1)\right)$$

□

Закон Пека

1931

Интенсивность смертности

$$\mu_x = \frac{A + Bc^x}{Kc^{-x} + Dc^x + 1}$$
$$c^x = e^{\alpha x}$$

Функция дожития

$$s(x) = e^{-\frac{k}{n+1}x^{n+1}}$$
$$\mu_x = kx^n$$

Кривая смертей

$$f(x) = kx^n e^{-\frac{k}{n+1}x^{n+1}}$$

Закон Вейбулла

1939

Интенсивность смертности как степенная функция

$$\mu_x = kx^n, \quad k > 0, n > 0.$$

Функция дожития:

$$s(x) = \exp\left(-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right)$$

Интегральная функция смертности

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right)$$

Кривая смертей

$$f(x) = kx^n \exp\left(-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right)$$

Мат.ожидание – полная средняя продолжительность жизни

$${}^0\tilde{e}_0 = \left(\frac{n+1}{k}\right)^{\frac{1}{n+1}} \Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$EX^2 = \left(\frac{n+1}{k}\right)^{\frac{2}{n+1}} \Gamma\left(\frac{2}{n+1}\right)$$

Дисперсия:

$$\sigma^2 = \left(\frac{n+1}{k}\right)^{\frac{2}{n+1}} \left(\Gamma\left(\frac{2}{n+1}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{n+1}\right) \right)$$

□

4. Интерполяция таблиц смертности между целочисленными возрастами

Линейная интерполяция

Прогноз вероятности

$${}_u|p_{[x]} = \frac{l_x + u d_x}{l_x} = \frac{l_x + u(l_{x+1} - l_x)}{l_x} = \frac{l_x(1 - u) + u l_{x+1}}{l_x}$$

Прогноз силы смертности

$$\mu_{x+u} = -\frac{s'(x+u)}{s(x+u)} = \frac{s(x) q_x}{s(x)(1 - u q_x)} = \frac{q_x}{1 - u q_x}$$

Или, что то же самое:

$$\mu_{x+t} = \frac{d_x}{l_{x+t}} = \frac{l_x - l_{x+1}}{(1-t)l_x + t l_{x+1}} = \frac{1 - p_x}{(1-t) + t p_x} = \frac{q_x}{1 - t q_x}$$

Гипотеза постоянства силы смертности

Интенсивность смертности на интервале $x \in [x, x + 1]$ является постоянной величиной, т. е. $\mu_x = \mu_{x+u}$. Функция дожития

$$s(x) = a_n e^{-b_n x} = s(n) (p_n)^n, \quad \text{где} \quad a_n = \frac{s(x)}{(p_n)^n}, \quad b_n = -\ln p_n$$

Прогноз числа живущих

$$l_{x+u} = l_x \left(\frac{l_{x+1}}{l_x} \right)^u = (l_x)^{1-u} (l_{x+1})^u$$

Прогноз вероятности

$${}_u|p_{[x]} = \frac{l_{x+u}}{l_x} = \frac{(l_x)^{1-u} (l_{x+1})^u}{l_x}$$

Гипотеза Балдуччи

На интервале $x \in [x, x + 1]$ функция $\frac{1}{s(x)}$ имеет равномерное распределение.

Прогноз вероятности

$${}_u|p_{[x]} = \frac{p_x}{p_x + u q_x}$$

Прогноз силы смертности

$${}_u|\mu_{[x]} = \frac{q_x}{p_x + u q_x}$$

□

5. Страховые ренты, аннуитеты и соотношения между ними

Базовое уравнение

$$a_{x:\overline{n}|} = s_{x:\overline{n}|} v^n n p_x$$

Следствия:

$$s_{x:\overline{n}|} = \frac{a_{x:\overline{n}|}}{v^n n p_x} = \frac{(1+i)^n a_{x:\overline{n}|}}{n p_x}$$

Страховое дисконтирование

$$a_{x:\overline{n}|} = s_{x:\overline{n}|} {}_n E_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = s_{x:\overline{n}|} v^n n p_x$$

Связка срочного, бессрочного аннуитета и показателей таблиц:

$$a_{x:\overline{n}|} = a_x - v^n p_x a_{x+n}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = (\ddot{a}_x - 1) - v^n p_x (\ddot{a}_{x+n} - 1)$$

m -кратные страховые ренты

пожизненные:

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

m -кратные страховые ренты, на срок:

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx a_{x:\overline{n}|} + (1 - {}_n E_x) \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + (1 - {}_n E_x) \frac{m-1}{2m}$$

m -кратный немедленный пожизненный аннуитет с гарантированным периодом n лет

$$EPV = \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} + v^n n p_x \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$$

Возрастающие и убывающие аннуитеты

Срочный возрастающий страховой аннуитет:

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{D_x + 2D_{x+1} + \dots + n D_{x+n-1}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n N_{x+n}}{D_x}$$

$$(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = (IA)_x - v^n \left(\frac{l_{x+n}}{l_x} \right) ((IA)_{x+n} + n A_x)$$

$$\bar{a}_x = \ddot{a}_x - \frac{1}{2}$$

Бессрочный возрастающий страховой аннуитет:

$$(I\ddot{a})_{x\overline{}} = \frac{S_x}{D_x}$$

Убывающий страховой аннуитет

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{n D_x + (n-1)D_{x+1} + \dots + D_{x+n-1}}{D_x}$$

□

6. Программы страхования: расчет премий и выплат

Программа 1 чистое дожитие (pure endowment)

Покрытие: дожитие (x) до истечения договора или до возраста $x + n$ лет. Один единовременный взнос в возрасте (x), одна выплата в возрасте $x + n$ лет

Актuarное уравнение:

$$l_x {}_nE_x = v^n l_{x+n}$$

Единовременный взнос

$${}_nE_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n {}_np_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$${}_nE_x = v^n {}_np_x$$

Ежегодный взнос

Серия ежегодных взносов в течение $x + n$ лет, одна выплата в конце года смерти.

Актuarное уравнение:

$$(l_x + l_{x+1} v^1 + \dots + l_{x+n-1} v^{n-1}) {}_nE_x^1 = l_{x+n} v^n$$

$${}_nE_x^1 = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Программа Пожизненное страхование, оплаченное к сроку $x + n$

$${}_{x+n}A_x^1 = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}}$$

Программа страхования жизни на случай смерти в течение n лет, выплата в конце года смерти, единовременный взнос

$$l_x {}_nA_x = d_x v^1 + \dots + d_{x+n-1} v^n$$

$${}_nA_x = {}_nA_x^1 = A_{x:n}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Программа пожизненное страхование, единовременный взнос, выплата в конце года смерти

$$l_x {}_nA_x = d_x v^1 + d_{x+1} v^2 + \dots$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

Единовременный взнос в пенсионный фонд, выплаты начиная со следующего года

$$l_x {}_k a_x = l_{x+1} v^1 + \dots + l_{x+k} v^k$$
$${}_k a_x = \frac{D_{x+1} + \dots + D_{x+k}}{D_x} \rightarrow \frac{N_{x+1} - N_{x+k+1}}{D_x}$$

Выплаты немедленно:

$${}_k \ddot{a}_x = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x}$$

Приведенная пожизненная пенсия (рента):

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + \dots}{D_x} = \frac{v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + \dots}{v^x l_x} = 1 + v p_x + \dots$$

То же, постнумерандо:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Естественно,

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

2. Отложенная срочная пенсия (рента):

$$l_x \cdot m|a_{x:k} = l_{x+m+1}v^{m+1} + \dots + l_{x+m+k}v^k$$
$$m|a_{x:k} = \frac{D_{x+m+1} + \dots + D_{x+m+k}}{D_x} \rightarrow \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+k+1}}{D_x}$$
$$m|\ddot{a}_{x:k} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+k}}{D_x}$$

Отложенная пожизненная немедленная пенсия (рента):

$$m|\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

Отложенная пожизненная немедленная пенсия (рента) постнумерандо:

$$m|a_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$$

3. Ежегодный в течение n лет взнос, пенсия k лет

$$(l_x + l_{x+1}v^1 + \dots + l_{x+n-1}v^{n-1}) \cdot n\ddot{a}_{x:k} = l_{x+n}v^n + \dots + l_{x+n+k}v^{n+k}$$

Ежегодный в течение n лет взнос, пенсия пожизненно

$$n\ddot{a}_x^1 = \frac{N_x}{N_x - N_{x+n}}$$

4. Ежегодный взнос в отложенную срочную страховую ренту, пренумерандо

$$m|n\ddot{a}_{x:k} = \frac{N_{x+n+m} - N_{x+n+m+k}}{N_x - N_{x+n}}$$

Пожизненно:

$$m|n\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n+m}}{N_x - N_{x+n}}$$

Рекуррентные формулы для вычисления страховых премий

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} \ddot{a}_{x+1}$$

$$\ddot{a}_x = 1 + v p_x \ddot{a}_{x+1}$$

Аналогично:

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} (a_{x+1} + 1)$$

$$a_x = v p_x (a_{x+1} + 1)$$

□

7. Резервы

Перспективный (проспективный) метод

Резерв – это разность между текущими оценками будущих выплат и будущих поступлений.

$${}_T V_x = A_{x+T} - P_x \ddot{a}_{x+T}$$

$${}_T V_x = \frac{P_x (N_x - N_{x+T}) - (M_x - M_{x+T})}{D_{x+T}}$$

Ретроспективный метод

Резерв – это разность между накопленными вместе с процентами премиями и произведенными выплатами в расчете на каждого живого к моменту оценки резервов, т. е. разность между

- современной стоимостью финансовых обязательств страховщика на оставшийся срок страхования и
- современной стоимостью предстоящих платежей страхователя.

Текущая стоимость взносов за T лет:

$$P_x (l_x + v l_{x+1} + \dots + v^{T-1} l_{x+T-1}) = P_x l_x \ddot{a}_{x:\overline{T}|}$$

Текущая стоимость единичной выплаты:

$$v d_x + v^2 d_{x+1} \dots + v^T d_{x+T} = l_x A_{x:\overline{T}|}^1$$

Определим разность в расчете на l_{x+T} доживших до возраста $x + T$ лет:

$$\frac{l_x}{l_{x+T}} (P_x \ddot{a}_{x:\overline{T}|} - A_{x:\overline{T}|}^1) = \frac{l_x}{l_{x+T}} \left(P_x \frac{N_x - N_{x+T}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+T}}{D_x} \right)$$

И окончательно:

$${}_T V_x = P_x \frac{N_x - N_{x+T}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+T}}{D_x}$$

Рекуррентная формула резервов

Сумма резерва и премии на начало года вместе с процентами за этот год равна сумме годовых выплат и резервов на конец года.

$$({}_tV_x + P_x)(1 + i) = q_{x+t} + p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x$$

Если заменить $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$, то получим

$$({}_tV_x + P_x)(1 + i) = {}_tV_x + q_{x+t}(1 - {}_tV_x)$$

Или, то же самое

$$({}_tV + P)(1 + i) = {}_{t+1}V + q(S - {}_{t+1}V)$$

Выражение резерва через аннуитеты:

$${}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}$$

□

8. Прогнозирование и оценка денежных потоков

Прибыль от смертности

Договоры, связанные со страхованием жизни являются долгосрочными. Это обстоятельство обуславливает необходимость учитывать, как и в какой мере влияет на финансовое состояние страховой компании повышение или понижение реального уровня смертности по сравнению с расчетным средним показателем. Если для конца $k + 1$ -го года действия полиса размер выплаты по смерти равен b_{k+1} , то

1. Сумма под риском смерти – это разность

$$b_{k+1} - {}_{k+1}V$$

2. Ожидаемое напряжение смертности на $k + 1$ -м году для N одинаковых полисов, есть произведение

$$N q_{k+1}(b_{k+1} - {}_{k+1}V)$$

3. Реальное напряжение смертности на $k + 1$ -м году – это если в течение $k + 1$ -го года наблюдалось n_d смертей, т. е. совокупная сумма под риском смерти:

$$n_d(b_{k+1} - {}_{k+1}V)$$

Итого, *прибыль от смертности* – это разность между ожидаемым и реальным напряжением от смертности:

$$ПС = N q_{k+1}(b_{k+1} - {}_{k+1}V) - n_d(b_{k+1} - {}_{k+1}V) = (N q_{k+1} - n_d)(b_{k+1} - {}_{k+1}V)$$

или, что то же:

$$ПС = (N q_{k+1} - n_d)(b_{k+1} - {}_{k+1}V)$$

Анализ потока прибыли (вектора прибыли)

В общем случае анализ потока (**вектора прибыли**) сводится к следующим вычислениям:

Денежный поток =

	Премия минус РВД
плюс	Начисление дохода на эту разность
минус	Выплаты по смерти
минус	Выплаты по дожитию
минус	Выплаты по расторжению

Изменения резервов =

Резервы на конец года · Вероятность того, договор не будет досрочно расторгнут и останется в силе МИНУС Резервы на начало года

Вектор прибыли =

	Денежный поток
плюс	Доход на резервы
минус	Изменения резервов

Маржа прибыли:

$$\text{Маржа прибыли} = \frac{EPV_{\text{прибыли}}}{EPV_{\text{премий}}} 100\%$$

□

Показатели таблиц смертности

x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	e_x
0	100 000	773	0,99 227	0,00 773	-	75,6
1	99 227	294	0,99 704	0,00 296	0,00 537	75,2
2	98 933	50	0,99 949	0,00 051	0,00 174	74,5
3	98 883	35	0,99 965	0,00 035	0,00 043	73,5
4	98 848	27	0,99 973	0,00 027	0,00 032	72,5
5	98 821	24	0,99 976	0,00 024	0,00 026	71,5
6	98 797	23	0,99 977	0,00 023	0,00 024	70,6
7	98 774	22	0,99 978	0,00 022	0,00 023	69,6
8	98 752	21	0,99 979	0,00 021	0,00 022	68,6
9	98 731	20	0,99 980	0,00 020	0,00 021	67,6
10	98 711	19	0,99 981	0,00 019	0,00 020	66,6
11	98 692	19	0,99 981	0,00 019	0,00 020	65,6
12	98 673	22	0,99 978	0,00 022	0,00 021	64,6
13	98 651	26	0,99 974	0,00 026	0,00 025	63,7
14	98 625	33	0,99 967	0,00 033	0,00 030	62,7
15	98 592	37	0,99 962	0,00 038	0,00 036	61,7
16	98 555	43	0,99 956	0,00 044	0,00 041	60,7
17	98 512	51	0,99 948	0,00 052	0,00 048	59,7
18	98 461	54	0,99 945	0,00 055	0,00 054	58,8
19	98 407	58	0,99 941	0,00 059	0,00 057	57,8
20	98 349	58	0,99 941	0,00 059	0,00 059	56,8
21	98 291	61	0,99 938	0,00 062	0,00 061	55,9
22	98 230	66	0,99 933	0,00 067	0,00 065	54,9
23	98 164	72	0,99 927	0,00 073	0,00 071	53,9
24	98 092	79	0,99 919	0,00 081	0,00 077	53,0
25	98 013	87	0,99 911	0,00 089	0,00 085	52,0
26	97 926	95	0,99 903	0,00 097	0,00 093	51,1
27	97 831	108	0,99 890	0,00 110	0,00 104	50,1
28	97 723	122	0,99 875	0,00 125	0,00 118	49,2
29	97 601	140	0,99 857	0,00 143	0,00 135	48,2
30	97 461	153	0,99 843	0,00 157	0,00 151	47,3
31	97 308	166	0,99 829	0,00 171	0,00 164	46,4
32	97 142	177	0,99 818	0,00 182	0,00 177	45,5
33	96 965	187	0,99 807	0,00 193	0,00 188	44,5
34	96 778	198	0,99 795	0,00 205	0,00 199	43,6
35	96 580	206	0,99 787	0,00 213	0,00 210	42,7
36	96 374	217	0,99 775	0,00 225	0,00 220	41,8
37	96 157	223	0,99 768	0,00 232	0,00 229	40,9
38	95 934	231	0,99 759	0,00 241	0,00 237	40,0
39	95 703	238	0,99 751	0,00 249	0,00 246	39,1
40	95 465	247	0,99 741	0,00 259	0,00 255	38,2
41	95 218	257	0,99 730	0,00 270	0,00 265	37,3
42	94 961	269	0,99 717	0,00 283	0,00 277	36,4
43	94 692	287	0,99 697	0,00 303	0,00 294	35,5
44	94 405	304	0,99 678	0,00 322	0,00 314	34,6
45	94 101	319	0,99 661	0,00 339	0,00 332	33,7
46	93 782	333	0,99 645	0,00 355	0,00 348	32,8
47	93 449	353	0,99 622	0,00 378	0,00 368	31,9
48	93 096	376	0,99 596	0,00 404	0,00 392	31,0
49	92 720	404	0,99 564	0,00 436	0,00 421	30,2

x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	e_x
50	92 316	424	0,99 541	0,00459	0,00449	29,3
51	91 892	450	0,99 510	0,00490	0,00476	28,4
52	91 442	483	0,99 472	0,00528	0,00511	27,6
53	90 959	516	0,99 433	0,00567	0,00550	26,7
54	90 443	564	0,99 376	0,00624	0,00598	25,9
55	89 879	607	0,99 325	0,00675	0,00652	25,0
56	89 272	667	0,99 253	0,00747	0,00714	24,2
57	88 605	711	0,99 198	0,00802	0,00778	23,4
58	87 894	759	0,99 136	0,00864	0,00837	22,5
59	87 135	819	0,99 060	0,00940	0,00906	21,7
60	86 316	875	0,98 986	0,01014	0,00982	20,9
61	85 441	937	0,98 903	0,01097	0,01061	20,1
62	84 504	1 012	0,98 802	0,01198	0,01154	19,4
63	83 492	1 056	0,98 735	0,01265	0,01239	18,6
64	82 436	1 174	0,98 576	0,01424	0,01354	17,8
65	81 262	1 212	0,98 509	0,01491	0,01469	17,1
66	80 050	1 319	0,98 352	0,01648	0,01583	16,3
67	78 731	1 365	0,98 266	0,01734	0,01706	15,6
68	77 366	1 421	0,98 163	0,01837	0,01802	14,9
69	75 945	1 591	0,97 905	0,02095	0,01986	14,1
70	74 354	1 697	0,97 718	0,02282	0,02213	13,4
71	72 657	1 892	0,97 396	0,02604	0,02474	12,7
72	70 765	2 019	0,97 147	0,02853	0,02767	12,0
73	68 746	2 186	0,96 820	0,03180	0,03063	11,4
74	66 560	2 383	0,96 420	0,03580	0,03439	10,7
75	64 177	2 575	0,95 988	0,04012	0,03871	10,1
76	61 602	2 822	0,95 419	0,04581	0,04392	9,5
77	58 780	2 972	0,94 944	0,05056	0,04939	9,0
78	55 808	3 149	0,94 357	0,05643	0,05498	8,4
79	52 659	3 319	0,93 697	0,06303	0,06159	7,9
80	49 340	3 495	0,92 916	0,07084	0,06928	7,4
81	45 845	3 632	0,92 078	0,07922	0,07800	6,9
82	42 213	3 715	0,91 199	0,08801	0,08732	6,5
83	38 498	3 793	0,90 148	0,09852	0,09791	6,0
84	34 705	3 788	0,89 085	0,10915	0,10964	5,6
85	30 917	3 713	0,87 990	0,12010	0,12175	5,3
86	27 204	3 571	0,86 873	0,13127	0,13432	4,9
87	23 633	3 447	0,85 414	0,14586	0,14916	4,6
88	20 186	3 186	0,84 217	0,15783	0,16470	4,3
89	17 000	2 947	0,82 665	0,17335	0,18104	4,0
90	14 053	2 587	0,81 591	0,18409	0,19690	3,7
91	11 466	2 315	0,79 810	0,20190	0,21443	3,4
92	9 151	2 026	0,77 860	0,22140	0,23782	3,2
93	7 125	1 724	0,75 804	0,24196	0,26355	2,9
94	5 401	1 386	0,74 338	0,25662	0,28674	2,7
95	4 015	1 082	0,73 051	0,26949	0,30525	2,5
96	2 933	843	0,71 258	0,28742	0,32636	2,2
97	2 090	628	0,69 952	0,30048	0,34807	1,9
98	1 462	449	0,69 289	0,30711	0,36212	1,5
99	1 013	543	0,46 397	0,53603	0,54745	1,0
100	470	470	0,00 000	1,00000	-	0,5

Селективные таблицы смертности $l_{[x]}$

x	$l_{[x]}$	$l_{[x-1]+1}$	l_x
0	99 810		100 000
1	99 162	99 197	99 227
2	98 919	99 928	98 933
3	98 873	98 879	98 883
4	98 840	98 845	98 848
5	98 814	98 819	98 821
6	98 790	98 795	98 797
7	98 768	98 772	98 774
8	98 746	98 750	98 752
9	98 725	98 729	98 731
10	98705	98 709	98 711
11	98 686	98 690	98 692
12	98 666	98 671	98 673
13	98 642	98 648	98 651
14	98 615	98 621	98 625
15	98 580	98 588	98 592
16	98 542	98 551	98 555
17	98 496	98 507	98 512
18	98 443	98 456	98 461
19	98 386	98 401	98 407
20	98 327	98 342	98 349
21	98 266	98 283	98 291
22	98 201	98 221	98 230
23	98 131	98 154	98 164
24	98 055	98 081	98 092
25	97 971	97 000	98 013
26	97 878	97 912	97 926
27	97 777	97 815	97 831
28	97 661	97 705	97 723
29	97 532	97 580	97 601
30	97 386	97 438	97 461
31	97 229	97 284	97 308
32	97 059	97 117	97 142
33	96 879	96 939	96 965
34	96 689	96 750	96 778
35	96 488	96 551	96 580
36	96 278	96 343	96 374
37	96 058	96 125	96 157
38	95 830	95 900	95 934
39	95 594	95 666	95 703
40	95 348	95 425	95 465
41	95 092	95175	95 218
42	94 824	94 913	94 961
43	94 540	94 638	94 692
44	94 238	94 345	94 405
45	93 919	94 035	94 101
46	93 583	93 709	93 782
47	93 229	93 368	93 449
48	92 581	93 005	93 096
49	92 449	92 617	92 720

x	$l_{[x]}$	$l_{[x-1]+1}$	l_x
50	92 020	92 203	92 316
51	91 564	91 767	91 892
52	91 078	91 302	91 442
53	90 552	90 803	90 959
54	89 986	90 266	90 443
55	89 366	89 681	89 879
56	88 699	89 047	89 272
57	87 975	88 356	88 605
58	87 198	87 619	87 894
59	86 366	86 829	87 135
60	85 471	85 979	86 316
61	84 509	85 069	85 441
62	83 488	84 091	84 504
63	82 375	83 049	83 492
64	81 206	81 930	82 436
65	79 933	80 726	81 262
66	78 605	79 79452	80 050
67	77 201	78 098	78 731
68	75 987	76 692	77 366
69	74 070	75 173	75 945
70	72 274	73 513	74 354
71	70 342	71 699	72 657
72	68 235	69 722	70 765
73	65 950	97 595	68 746
74	63 474	65 281	66 560
75	60 765	62 769	64 177
76	57 873	60 031	61 602
77	54 782	57 097	58 780
78	51 520	53 995	55 808
79	48 075	50 717	52 659
80	44 474	47 262	49 340
81		43 652	45 845
82			42 213
83			38 498
84			34 705
85			30 917
86			27 204
87			23 633
88			20 186
89			17 000
90			14 053
91			11 466
92			9 151
93			7 125
94			5 401
95			4 015
96			2 933
97			2 090
98			1 462
99			1 013
100			470

Селективные таблицы смертности $d_{[x]}$

x	$d_{[x]}$	$d_{[x-1]+1}$	d_x
0	613		773
1	234	264	294
2	4	45	50
3	28	31	35
4	21	24	27
5	19	22	24
6	18	21	23
7	18	20	22
8	17	19	21
9	16	18	20
10	15	17	19
11	15	17	19
12	18	20	22
13	21	23	26
14	27	29	33
15	29	33	37
16	35	39	43
17	40	46	51
18	42	49	54
19	44	52	58
20	44	51	58
21	45	53	61
22	47	57	66
23	50	62	72
24	55	68	79
25	59	74	87
26	63	81	95
27	72	92	108
28	81	104	122
29	94	119	140
30	102	130	153
31	112	142	166
32	120	152	177
33	129	161	187
34	138	170	198
35	145	177	206
36	153	186	217
37	158	191	223
38	164	197	231
39	169	201	238
40	173	207	247
41	179	214	257
42	186	221	269
43	195	233	287
44	203	244	304
45	210	253	319
46	215	260	333
47	224	272	353
48	234	285	376
49	246	301	404

x	$d_{[x]}$	$d_{[x-1]+1}$	d_x
50	253	311	424
51	262	325	450
52	275	343	483
53	286	360	516
54	35	387	564
55	319	409	607
56	343	442	667
57	356	462	711
58	369	484	759
59	387	513	819
60	402	538	875
61	418	565	937
62	439	599	1 012
63	445	613	1 056
64	480	668	1 174
65	481	676	1 212
66	507	721	1 319
67	509	732	1 365
68	514	747	1 421
69	557	819	1 591
70	575	856	1 697
71	620	934	1 892
72	640	976	2 019
73	669	1 035	2 186
74	705	1 104	2 383
75	734	1 167	2 575
76	776	1 251	2 822
77	787	1 289	2 972
78	803	1 336	3 149
79	813	1 377	3 319
80	822	1 417	3 495
81		1 439	3 632
82			3 715
83			3 793
84			3 788
85			3 713
86			3 571
87			3 447
88			3 186
89			2 947
90			2 587
91			2 315
92			2 026
93			1 724
94			1 386
95			1 082
96			843
97			628
98			449
99			543
100			470

Селективные таблицы смертности $q_{[x]}$

x	$q_{[x]}$	$q_{[x-1]+1}$	q_x
0	0,00 614		0,00773
1	0,00 235	0,00 266	0,00296
2	0,000 40	0,000246	0,00051
3	0,000 28	0,0000 32	0,00035
4	0,000 22	0,000 25	0,00027
5	0,000 19	0,000 22	0,00024
6	0,000 19	0,000 21	0,00023
7	0,000 18	0,000 20	0,00022
8	0,000 17	0,000 19	0,00021
9	0,000 16	0,000 18	0,00020
10	0,000 16	0,000 17	0,00019
11	0,000 16	0,000 17	0,00019
12	0,000 18	0,000 20	0,00022
13	0,000 21	0,000 24	0,00026
14	0,000 27	0,000 30	0,00033
15	0,000 30	0,000 34	0,00038
16	0,000 35	0,000 39	0,00044
17	0,000 41	0,000 47	0,00052
18	0,000 43	0,000 49	0,00055
19	0,000 45	0,000 53	0,00059
20	0,000 44	0,000 52	0,00059
21	0,000 45	0,000 54	0,00062
22	0,000 48	0,000 58	0,00067
23	0,000 51	0,000 63	0,00073
24	0,000 55	0,000 69	0,00081
25	0,000 60	0,000 76	0,00089
26	0,000 65	0,000 83	0,00097
27	0,000 74	0,000 94	0,00110
28	0,000 83	0,00 106	0,00125
29	0,000 95	0,00 122	0,00143
30	0,00 105	0,00 134	0,00157
31	0,00 159	0,00 146	0,00171
32	0,00 124	0,00 156	0,00182
33	0,00 133	0,00 166	0,00193
34	0,00 143	0,00 176	0,00205
35	0,00 150	0,00 184	0,00213
36	0,00 159	0,00 193	0,00225
37	0,00 165	0,00 299	0,00232
38	0,00 171	0,00 205	0,00241
39	0,00 176	0,00 210	0,00249
40	0,00 182	0,00 217	0,00259
41	0,00 188	0,00 224	0,00270
42	0,00 196	0,00 233	0,00283
43	0,00 207	0,00 246	0,00303
44	0,00 216	0,00 259	0,00322
45	0,00 224	0,00 269	0,00339
46	0,00 231	0,00 277	0,00355
47	0,00 241	0,00 291	0,00378
48	0,00 252	0,00 306	0,00404
49	0,00 266	0,00 325	0,00436

x	$q_{[x]}$	$q_{[x-1]+1}$	q_x
50	0,00 275	0,00 338	0,00459
51	0,00 286	0,00 354	0,00490
52	0,00 301	0,00 376	0,00528
53	0,00 316	0,00 397	0,00567
54	0,00 339	0,00 429	0,00624
55	0,00 358	0,00 456	0,00675
56	0,00 386	0,00 496	0,00747
57	0,00 404	0,00 523	0,00802
58	0,00 423	0,00 553	0,00864
59	0,00 448	0,00 5591	0,00940
60	0,00 471	0,00 626	0,01014
61	0,00 495	0,00 664	0,01097
62	0,00 526	0,00 712	0,01198
63	0,00 540	0,00 738	0,01265
64	0,00 591	0,00 815	0,01424
65	0,00 601	0,00 838	0,01491
66	0,00 646	0,00 908	0,01648
67	0,00 660	0,00 937	0,01734
68	0,00 679	0,00 974	0,01837
69	0,00 752	0,010 89	0,02095
70	0,00 796	0,011 64	0,02282
71	0,00 881	0,013 03	0,02604
72	0,00 938	0,014 00	0,02853
73	0,010 15	0,0 15 31	0,03180
74	0,011 10	0,0 16 91	0,03580
75	0,012 08	0,018 60	0,04012
76	0,013 39	0,020 84	0,04581
77	0,014 36	0,022 58	0,05056
78	0,015 57	0,024 75	0,05643
79	0,016 91	0,07 16	0,06303
80	0,018 48	0,029 99	0,07084
81		0,032 97	0,07922
82			0,08801
83			0,09852
84			0,10915
85			0,12010
86			0,13127
87			0,14586
88			0,15783
89			0,17335
90			0,18409
91			0,20190
92			0,22140
93			0,24196
94			0,25662
95			0,26949
96			0,28742
97			0,30048
98			0,30711
99			0,53603
100			1,00000

Страховые аннуитеты 4%

x	\ddot{a}_x	A_x	2A_x	$(\ddot{I}a)_x$	$(Ia)_x$
0	24,14	0,072	0,018	526,930	3,872
1	24,25	0,067	0,012	526,976	3,983
2	24,25	0,067	0,010	524,387	4,085
3	24,20	0,069	0,010	520,402	4,181
4	24,13	0,072	0,011	516,237	4,277
5	24,06	0,074	0,011	511,928	4,375
6	23,99	0,077	0,012	507,502	4,473
7	23,92	0,080	0,013	502,967	4,573
8	23,84	0,083	0,013	498,322	4,674
9	23,76	0,086	0,014	493,566	4,775
10	23,67	0,089	0,015	488,698	4,878
11	23,59	0,093	0,016	483,719	4,981
12	23,49	0,096	0,018	478,631	5,084
13	23,40	0,100	0,019	473,448	5,189
14	23,30	0,104	0,020	468,176	5,294
15	23,20	0,108	0,021	462,825	5,399
16	23,10	0,112	0,023	457,382	5,505
17	22,99	0,116	0,024	451,854	5,612
18	22,88	0,120	0,026	446,248	5,719
19	22,77	0,124	0,027	440,543	5,826
20	22,65	0,129	0,029	434,740	5,933
21	22,53	0,133	0,031	428,822	6,040
22	22,41	0,138	0,032	422,803	6,147
23	22,28	0,143	0,034	416,690	6,254
24	22,15	0,148	0,037	410,487	6,360
25	22,01	0,153	0,039	404,199	6,465
26	21,87	0,159	0,041	397,828	6,570
27	21,73	0,164	0,043	391,375	6,674
28	21,58	0,170	0,046	384,859	6,778
29	21,43	0,176	0,049	378,282	6,880
30	21,28	0,182	0,051	371,660	6,983
31	21,12	0,188	0,054	364,971	7,084
32	20,96	0,194	0,057	358,214	7,185
33	20,80	0,200	0,060	351,382	7,284
34	20,63	0,207	0,083	344,471	7,382
35	20,46	0,213	0,066	337,485	7,477
36	20,28	0,220	0,069	330,413	7,571
37	20,10	0,227	0,073	323,267	7,662
38	19,91	0,234	0,077	316,031	7,750
39	19,71	0,242	0,081	308,714	7,836
40	19,51	0,250	0,085	301,315	7,917
41	19,30	0,258	0,089	293,841	7,995
42	19,08	0,266	0,094	286,299	8,068
43	18,86	0,275	0,099	278,698	8,137
44	18,63	0,284	0,105	271,057	8,202
45	18,39	0,293	0,110	263,376	8,261
46	18,15	0,302	0,116	255,650	8,316
47	17,90	0,312	0,123	247,882	8,364
48	17,64	0,322	0,130	240,091	8,406
49	17,38	0,332	0,137	232,287	8,442

x	\ddot{a}_x	A_x	2A_x	$(\ddot{I}a)_x$	$(Ia)_x$
50	17,11	0,342	0,144	224,48	8,472
51	16,83	0,353	0,152	216,67	8,494
52	16,54	0,364	0,160	208,85	8,508
53	16,25	0,375	0,169	201,07	8,515
54	15,95	0,387	0,178	193,31	8,514
55	15,64	0,398	0,188	185,61	8,506
56	15,33	0,410	0,197	177,97	8,489
57	15,02	0,422	0,208	170,41	8,465
58	14,70	0,435	0,218	162,92	8,432
59	14,37	0,447	0,229	155,49	8,390
60	14,04	0,460	0,241	148,16	8,339
61	13,70	0,473	0,253	140,91	8,278
62	13,35	0,486	0,266	133,77	8,207
63	13,00	0,500	0,279	126,75	8,126
64	12,64	0,514	0,293	119,82	8,033
65	12,28	0,528	0,307	113,07	7,933
66	11,91	0,542	0,322	106,41	7,818
67	11,54	0,556	0,337	99,929	7,694
68	11,15	0,571	0,353	93,549	7,555
69	10,76	0,586	0,370	87,296	7,399
70	10,36	0,601	0,388	81,304	7,237
71	9,97	0,617	0,406	75,502	7,062
72	9,57	0,632	0,424	69,980	6,882
73	9,18	0,647	0,443	64,667	6,691
74	8,78	0,662	0,462	59,604	6,492
75	8,40	0,677	0,481	54,814	6,289
76	8,01	0,692	0,500	50,292	6,080
77	7,65	0,706	0,519	46,080	5,873
78	7,28	0,720	0,538	42,101	5,660
79	6,92	0,734	0,556	38,380	5,444
80	6,57	0,747	0,575	34,919	5,229
81	6,24	0,760	0,593	31,728	5,016
82	5,91	0,773	0,611	28,793	4,807
83	5,60	0,784	0,628	26,090	4,601
84	5,31	0,796	0,644	23,634	4,403
85	5,03	0,806	0,659	21,390	4,211
86	4,77	0,817	0,674	19,332	4,024
87	4,51	0,827	0,688	17,437	3,839
88	4,27	0,836	0,700	15,739	3,668
89	4,04	0,845	0,711	14,159	3,498
90	3,83	0,853	0,721	12,728	3,099
91	3,60	0,861	0,730	11,344	2,891
92	3,39	0,869	0,737	10,085	2,681
93	3,20	0,877	0,739	8,938	2,468
94	3,02	0,884	0,736	7,875	2,249
95	2,82	0,892	0,725	6,799	2,003
96	2,59	0,900	0,705	5,666	2,714
97	2,32	0,911	0,667	4,489	1,379
98	1,96	0,924	0,601	3,224	0,982
99	1,45	0,944	0,496	1,892	0,515
100	1,00	0,962	0,000	1,000	0,000

Страховые аннуитеты 4%, селективные

x	$\ddot{a}_{[x]}$	$A_{[x]}$	${}^2A_{[x]}$	$(\ddot{ia})_{[x]}$	$(Ia)_{[x]}$
0	24,18	0,070	0,016	527,93	3,868
1	24,27	0,067	0,011	527,32	3,976
2	24,26	0,067	0,010	524,46	4,076
3	24,20	0,069	0,010	516,28	4,171
4	24,13	0,072	0,011	516,28	4,267
5	24,06	0,074	0,011	511,96	4,364
6	23,92	0,077	0,012	507,54	4,463
7	23,92	0,080	0,013	503,00	4,562
8	23,84	0,083	0,013	498,35	4,6663
9	23,76	0,086	0,014	493,60	4,764
10	23,68	0,089	0,015	488,73	4,866
11	23,59	0,093	0,016	483,75	4,968
12	23,49	0,096	0,017	478,66	5,072
13	23,40	0,100	0,019	473,49	5,176
14	23,30	0,104	0,020	468,22	5,280
15	23,20	0,107	0,021	462,88	5,386
16	23,10	0,111	0,023	457,44	5,491
17	22,99	0,115	0,024	451,93	5,598
18	22,89	0,120	0,025	446,33	5,704
19	22,77	0,124	0,027	440,63	5,811
20	22,66	0,128	0,029	434,84	5,918
21	22,54	0,133	0,030	428,93	6,025
22	22,41	0,138	0,032	422,93	6,131
23	22,29	0,143	0,034	416,83	6,238
24	22,16	0,148	0,036	410,64	6,343
25	22,02	0,153	0,038	404,37	6,449
26	21,88	0,158	0,041	398,02	6,553
27	21,74	0,164	0,043	391,59	6,658
28	21,59	0,169	0,045	385,10	6,761
29	21,44	0,175	0,048	378,55	6,864
30	21,29	0,181	0,050	371,94	6,966
31	21,14	0,187	0,053	365,27	7,067
32	20,98	0,193	0,056	358,52	7,168
33	20,82	0,199	0,059	351,69	7,266
34	20,65	0,205	0,063	344,79	7,364
35	20,48	0,213	0,065	337,80	7,459
36	20,30	0,212	0,068	330,74	7,552
37	20,11	0,219	0,072	323,60	7,643
38	19,93	0,226	0,076	316,37	7,731
39	19,73	0,241	0,080	309,07	7,816
40	19,53	0,248	0,084	301,68	7,898
41	19,32	0,256	0,088	294,23	7,975
42	19,11	0,265	0,093	286,71	8,049
43	18,88	0,273	0,098	279,14	8,118
44	18,66	0,282	0,103	271,53	8,183
45	18,42	0,291	0,109	263,88	8,244
46	18,18	0,300	0,115	256,19	8,299
47	17,94	0,310	0,121	247,46	8,348
48	17,68	0,319	0,128	240,091	8,391
49	17,42	0,329	0,134	232,96	8,428

x	$\ddot{a}_{[x]}$	$A_{[x]}$	${}^2A_{[x]}$	$(\ddot{ia})_{[x]}$	$(Ia)_{[x]}$
50	17,16	0,339	0,142	225,20	8,459
51	16,88	0,350	0,149	217,44	8,483
52	16,60	0,361	0,157	209,69	8,500
53	16,32	0,372	0,166	201,97	8,510
54	15,02	0,383	0,174	194,29	8,512
55	15,73	0,394	0,184	186,67	8,507
56	15,42	0,406	0,193	179,11	8,494
57	15,12	0,418	0,203	171,62	8,474
58	14,80	0,430	0,213	164,21	8,446
59	14,49	0,442	0,224	156,86	8,409
60	14,16	0,454	0,235	149,61	8,363
61	13,83	0,467	0,246	142,45	8,308
62	13,50	0,480	0,258	135,38	8,243
63	13,16	0,493	0,270	128,45	8,169
64	12,81	0,506	0,284	121,61	8,084
65	12,46	0,519	0,297	114,93	7,991
66	11,10	0,533	0,311	109,34	7,884
67	11,74	0,547	0,326	101,87	7,765
68	11,37	0,561	0,341	95,58	7,636
69	10,99	0,575	0,357	89,46	7,494
70	10,62	0,590	0,390	83,56	7,346
71	10,25	0,604	0,407	77,92	7,188
72	9,88	0,618	0,424	72,51	7,023
73	9,51	0,632	0,441	67,33	6,850
74	9,14	0,659	0,457	62,41	6,672
75	8,79	0,672	0,458	57,79	6,492
76	8,44	0,685	0,475	53,41	6,308
77	8,10	0,698	0,491	49,31	6,122
78	7,77	0,710	0,508	45,45	5,932
79	7,44	0,721	0,524	41,86	5,743
80	7,13	0,720	0,540	38,53	5,554
81	7,14	0,729	0,536	37,41	5,593
82	6,87	0,738	0,550	34,60	5,420
83	6,62	0,738	0,563	32,01	5,249
84	6,37	0,746	0,576	29,61	5,079
85	6,13	0,754	0,588	27,38	4,908
86	5,91	0,760	0,598	25,38	4,743
87	5,70	0,765	0,608	23,49	4,572
88	5,50	0,768	0,617	21,77	4,402
89	5,29	0,771	0,624	20,08	4,215
90	5,10	0,771	0,630	18,52	4,020
91	4,92	0,766	0,632	17,10	3,815
92	4,75	0,756	0,629	15,78	3,592
93	4,57	0,739	0,620	14,42	3,329
94	4,36	0,711	0,603	12,95	3,006
95	4,11	0,664	0,570	11,36	2,604
96	3,78	0,591	0,514	9,53	2,089
97	3,30	0,477	0,424	7,35	1,430
98	2,89	0,000	0,000	5,70	0,000
99	1,96	0,000	0,000	2,92	0,000
100	1,00	0,000	0,000	1,00	0,000

Страховые аннуитеты 6%

x	\ddot{a}_x	A_x	2A_x	$(\ddot{I}a)_x$	$(Ia)_x$
0	17,13	0,031	0,012	283,626	1,073
1	17,23	0,025	0,006	284,689	1,114
2	17,25	0,023	0,004	284,351	1,158
3	17,24	0,024	0,004	283,266	1,203
4	17,22	0,025	0,004	282,091	1,250
5	17,20	0,027	0,004	280,842	1,299
6	17,17	0,028	0,004	279,533	1,349
7	17,15	0,029	0,004	278,169	1,400
8	17,12	0,031	0,005	276,746	1,453
9	17,09	0,033	0,005	275,264	1,508
10	17,06	0,034	0,005	273,721	1,564
11	17,02	0,036	0,006	272,116	1,622
12	16,99	0,038	0,006	270,449	1,681
13	16,95	0,040	0,007	268,728	1,741
14	16,91	0,043	0,008	266,952	1,803
15	16,87	0,045	0,008	265,130	1,867
16	16,83	0,047	0,009	263,250	1,932
17	16,79	0,050	0,010	261,315	1,999
18	16,75	0,052	0,010	259,331	2,067
19	16,70	0,055	0,011	257,281	2,137
20	16,65	0,057	0,012	255,166	2,209
21	16,60	0,060	0,013	252,973	2,282
22	16,55	0,063	0,014	250,710	2,356
23	16,49	0,067	0,015	248,379	2,432
24	16,43	0,070	0,016	245,982	2,509
25	16,37	0,073	0,017	243,518	2,588
26	16,31	0,077	0,018	240,988	2,668
27	16,24	0,081	0,019	238,391	2,749
28	16,18	0,084	0,021	235,737	2,832
29	16,11	0,088	0,022	233,026	2,916
30	16,04	0,092	0,023	230,266	3,002
31	15,96	0,096	0,025	227,441	3,089
32	15,89	0,101	0,026	224,550	3,177
33	15,81	0,105	0,027	221,585	3,267
34	15,73	0,110	0,029	218,544	3,358
35	15,64	0,114	0,030	215,424	3,451
36	15,56	0,119	0,032	212,219	3,544
37	15,46	0,125	0,034	208,933	3,638
38	15,37	0,130	0,036	205,554	3,733
39	15,27	0,136	0,038	202,083	3,828
40	15,16	0,142	0,040	198,519	3,924
41	15,05	0,148	0,043	194,864	4,019
42	14,93	0,155	0,046	191,120	4,114
43	14,81	0,162	0,049	187,290	4,209
44	14,68	0,169	0,052	183,384	4,303
45	14,55	0,176	0,055	179,400	4,397
46	14,41	0,184	0,059	175,334	4,489
47	14,27	0,192	0,063	171,184	4,579
48	14,12	0,201	0,067	166,961	4,667
49	13,96	0,210	0,071	162,671	4,754

x	\ddot{a}_x	A_x	2A_x	$(\ddot{I}a)_x$	$(Ia)_x$
50	13,80	0,219	0,076	158,32	4,838
51	13,63	0,228	0,081	153,90	4,919
52	13,45	0,238	0,087	149,41	4,996
53	13,27	0,249	0,083	144,88	5,070
54	13,08	0,260	0,089	140,31	5,139
55	12,89	0,271	0,106	135,71	5,205
56	12,69	0,282	0,113	131,07	5,266
57	12,48	0,294	0,120	126,43	5,323
58	12,27	0,306	0,128	121,77	5,374
59	12,05	0,318	0,136	117,08	5,420
60	11,82	0,331	0,145	112,39	5,459
61	11,59	0,344	0,154	107,70	5,491
62	11,35	0,358	0,164	103,01	5,517
63	11,10	0,372	0,175	98,343	5,535
64	10,84	0,386	0,186	93,661	5,543
65	10,59	0,401	0,198	89,054	5,545
66	10,32	0,416	0,210	84,435	5,536
67	10,04	0,432	0,223	79,883	5,518
68	9,75	0,448	0,238	75,341	5,486
69	9,45	0,465	0,254	70,826	5,440
70	9,15	0,482	0,270	66,451	5,387
71	8,84	0,500	0,287	62,160	5,320
72	8,53	0,517	0,304	58,032	5,246
73	8,22	0,535	0,322	54,012	5,160
74	7,90	0,553	0,341	50,136	5,064
75	7,59	0,571	0,360	46,430	4,959
76	7,27	0,588	0,380	42,895	4,847
77	6,97	0,605	0,389	39,570	4,731
78	6,67	0,623	0,419	36,395	4,606
79	6,36	0,640	0,440	33,398	4,474
80	6,07	0,656	0,460	30,582	4,338
81	5,78	0,673	0,480	27,965	4,200
82	5,51	0,688	0,500	25,535	4,061
83	5,24	0,704	0,519	23,279	3,920
84	4,98	0,718	0,538	21,214	3,782
85	4,74	0,732	0,556	19,313	3,646
86	4,50	0,745	0,573	17,557	3,511
87	4,28	0,758	0,590	15,926	3,375
88	4,07	0,770	0,606	14,458	3,247
89	3,86	0,782	0,620	13,080	3,118
90	3,67	0,793	0,634	11,825	2,996
91	3,46	0,804	0,647	10,600	2,863
92	3,27	0,815	0,658	9,479	2,735
93	3,09	0,825	0,665	8,452	2,614
94	2,93	0,834	0,666	7,495	2,501
95	2,75	0,845	0,682	6,515	1,377
96	2,53	0,857	0,649	5,470	1,223
97	2,28	0,871	0,621	4,369	1,033
98	1,94	0,890	0,568	3,166	0,761
99	1,44	0,919	0,477	1,875	0,332
100	1,00	0,943	0,000	1,000	0,000

Страховые аннуитеты 6%, селективные

x	$\ddot{a}_{[x]}$	$A_{[x]}$	${}^2A_{[x]}$	$(\ddot{ia})_{[x]}$	$(Ia)_{[x]}$
0	17,16	0,029	0,010	284,26	1,072
1	17,24	0,024	0,005	284,898	1,113
2	17,26	0,023	0,004	284,39	1,157
3	17,24	0,024	0,003	283,29	1,202
4	17,22	0,025	0,004	282,11	1,249
5	17,20	0,027	0,004	280,86	1,297
6	17,17	0,028	0,004	279,55	1,347
7	17,15	0,029	0,004	278,19	1,398
8	17,12	0,031	0,005	276,76	1,451
9	17,09	0,033	0,005	275,28	1,506
10	17,06	0,034	0,005	273,74	1,562
11	17,03	0,036	0,006	272,13	1,619
12	16,99	0,038	0,006	270,47	1,678
13	16,95	0,040	0,007	268,75	1,739
14	16,92	0,042	0,008	266,98	1,801
15	16,88	0,045	0,008	265,16	1,864
16	16,84	0,047	0,009	263,28	1,922
17	16,79	0,049	0,009	261,36	1,996
18	16,75	0,052	0,010	259,38	2,064
19	16,70	0,054	0,011	257,33	2,134
20	16,66	0,057	0,012	255,22	2,206
21	16,61	0,060	0,012	232,04	2,279
22	16,55	0,063	0,013	250,78	2,353
23	16,50	0,066	0,014	248,46	2,429
24	16,44	0,069	0,015	246,07	2,509
25	16,38	0,073	0,016	243,62	2,584
26	16,32	0,076	0,018	241,10	2,664
27	16,25	0,080	0,019	238,52	2,745
28	16,19	0,084	0,020	235,89	2,828
29	16,12	0,088	0,021	233,19	2,912
30	16,05	0,092	0,023	230,44	2,998
31	15,97	0,096	0,024	227,62	3,085
32	15,90	0,100	0,025	224,74	3,173
33	15,82	0,104	0,027	221,78	3,263
34	15,74	0,109	0,028	218,74	3,354
35	15,66	0,114	0,030	215,63	3,446
36	15,57	0,119	0,031	212,43	3,539
37	15,48	0,124	0,033	209,15	3,633
38	15,38	0,129	0,035	205,77	3,728
39	15,28	0,135	0,037	202,31	3,823
40	15,18	0,141	0,039	198,76	3,918
41	15,07	0,147	0,042	195,12	4,014
42	14,95	0,154	0,044	191,39	4,109
43	14,83	0,160	0,047	187,56	4,204
44	14,71	0,167	0,050	183,70	4,298
45	14,58	0,175	0,053	179,74	4,392
46	14,44	0,182	0,057	175,70	4,484
47	14,30	0,190	0,061	171,58	4,575
48	14,15	0,199	0,065	167,40	4,664
49	17,00	0,207	0,061	163,14	4,751

x	$\ddot{a}_{[x]}$	$A_{[x]}$	${}^2A_{[x]}$	$(\ddot{ia})_{[x]}$	$(Ia)_{[x]}$
50	13,84	0,216	0,073	158,83	4,836
51	13,67	0,226	0,078	154,44	4,918
52	13,50	0,235	0,084	150,01	4,996
53	13,32	0,245	0,089	145,53	5,071
54	13,14	0,256	0,095	141,01	5,143
55	12,95	0,266	0,101	136,48	5,211
56	12,76	0,277	0,108	131,91	5,274
57	12,56	0,289	0,115	127,33	5,334
58	12,35	0,300	0,122	122,73	5,388
59	12,14	0,312	0,130	118,11	5,436
60	11,92	0,325	0,138	113,49	5,479
61	11,70	0,337	0,147	108,87	5,516
62	11,47	0,350	0,156	104,24	5,545
63	11,23	0,364	0,166	99,65	5,568
64	10,99	0,377	0,176	95,05	5,582
65	10,74	0,391	0,187	90,50	5,590
66	10,48	0,406	0,199	85,95	5,586
67	10,21	0,421	0,211	81,43	5,573
68	9,94	0,437	0,224	76,97	5,549
69	9,65	0,453	0,239	72,57	5,513
70	9,37	0,469	0,253	68,31	5,470
71	9,08	0,485	0,268	64,14	5,417
72	8,79	0,501	0,284	60,11	5,355
73	8,51	0,517	0,300	56,22	5,284
74	8,22	0,533	0,317	52,48	5,204
75	7,93	0,549	0,333	48,93	5,119
76	7,65	0,565	0,350	45,54	5,027
77	7,38	0,580	0,367	42,32	4,929
78	7,70	0,596	0,384	39,27	4,824
79	6,84	0,610	0,401	36,41	4,715
80	6,58	0,625	0,418	33,73	4,603
81	6,60	0,622	0,411	32,93	4,665
82	6,38	0,634	0,426	30,64	4,559
83	6,16	0,646	0,440	28,51	4,452
84	5,95	0,657	0,454	26,53	4,342
85	5,75	0,667	0,467	24,67	4,227
86	5,56	0,675	0,480	22,99	4,115
87	5,38	0,683	0,491	21,40	3,995
88	5,21	0,690	0,502	19,94	3,873
89	5,03	0,695	0,512	18,48	3,735
90	4,85	0,698	0,521	17,15	3,587
91	4,70	0,697	0,527	15,91	3,426
92	4,55	0,691	0,528	14,76	3,248
93	4,39	0,678	0,524	13,57	3,031
94	4,20	0,656	0,514	12,56	2,757
95	3,97	0,617	0,492	10,83	2,408
96	3,67	0,551	0,450	9,16	1,950
97	3,22	0,450	0,378	7,12	1,350
98	2,83	0,000	0,000	5,56	0,000
99	1,94	0,000	0,000	2,89	0,000
100	1,00	0,000	0,000	1,00	0,000